动力学逆问题

梅凤翔 著

Inverse Problems
Of Dynamics

国防工业出版社
National Defense Industry Press

责任编辑：程邦仁　brcheng@ndip.cn
责任校对：钱辉玲
封面设计：慧　籽

上架建议：力学
http://www.ndip.cn
ISBN 978-7-118-06199-4
9 787118 061994 >
定价：42.00 元

动力学逆问题

Inverse Problems of Dynamics

梅凤翔 著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

动力学逆问题/梅凤翔著. —北京:国防工业出版社,
2009.5

ISBN 978-7-118-06199-4

Ⅰ.动… Ⅱ.梅… Ⅲ.动力学-逆问题-研究 Ⅳ.0313
0175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 015349 号

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 10⅝ 字数 260 千字

2009 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 **定价** 42.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,原国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 在国防科学技术领域中,学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著;密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。

4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革

开放的新形势下，原国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金
第六届评审委员会组成人员

前　言

众所周知，应用质点运动微分方程可以求解质点动力学的两类问题。第一类问题是已知质点的运动，求作用在质点上的力；第二类问题是已知作用在质点上的力，求质点的运动。第二类问题称为动力学正问题，第一类问题称为动力学逆问题。Newton 根据行星运动的 Kepler 三定律，导出了他的万有引力定律，为 Newton 力学奠定了基础。这是最古老、最著名的动力学逆问题。在刚体动力学、变质量体动力学、分析动力学、转子动力学、结构动力学、弹性动力学中，都有各种各样的逆问题。随着科学技术的发展，动力学逆问题的提法也在不断扩充与完善，直到 20 世纪 60 年代至 70 年代，动力学逆问题才有了一般的提法。目前，动力学逆问题已成为星际航行学、火箭动力学、规划运动理论的基本问题。动力学逆问题在工程中有广泛的应用，如工程建模、结构修改、地球物理勘探、油气开发、材料无损检测和评价、设备故障诊断等。因此，研究动力学逆问题不仅有理论意义，而且有更为重要的实际价值。

动力学逆问题有以下显著特点：(1)动力学逆问题的提法和解法总是以正问题的提法和解法为基础；(2)凡有正问题，必有逆问题，因此一门动力学的建立必然伴有逆问题；(3)动力学逆问题一般来说是一个“灰箱”，往往因给定信息不充分而不能得到单一解答。这种不唯一性质恰恰为理论与实际提供了需要的余地，可以根据需要，如稳定性、优化等，提出补充要求。

本书侧重研究有限自由度动力系统动力学逆问题的基本理论与基本方法。全书共分 9 章。第 1 章介绍动力学逆问题的基本提法和解法，包括质点动力学第一类问题，六个经典动力学逆问题，动力学逆问题的提法，运动方程的建立、修改与封闭等。第 2 章研

究分析动力学中的逆问题,包括广义坐标中 Lagrange 方程的建立,正则方程的建立,Суслов 问题,按给定的一个积分确定广义力,Noether 对称性与动力学逆问题,Hamilton – Jacobi 方法与动力学逆问题,Poisson 方法与动力学逆问题等。第 3 章讨论运动控制理论中的逆问题,包括构造稳定系统问题的提法和解法,规划运动系统的构造,非完整运动规划等。第 4 章讨论刚体动力学中的逆问题,包括 Euler – Poisson 方程及三种经典可积情形,重刚体定点运动的动力学逆问题,刚体运动方程的封闭,刚体运动方程的修改,势力场中 Hess 运动的条件等。第 5 章研究变质量动力学中的逆问题,包括变质量系统动力学,变质量重质点的上升运动,变质量体的规划运动,变质量质点在规划运动中取驻值的泛函的构造,以及变质量系统 Noether 对称性与动力学逆问题等。第 6 章论述非完整动力学中的逆问题,包括非完整动力学简介,非完整系统运动方程的组建,修改与封闭问题,力场的构造,广义 Poisson 条件与非完整动力学逆问题,Bertrand 定理对非完整系统的推广,非完整系统的对称性与动力学逆问题,Szebehely 问题对非完整系统的推广,变质量非完整系统的广义 Мещерский 问题,以及二阶线性非完整动力学逆问题等。第 7 章论述 Birkhoff 系统动力学逆问题,包括 Pfaff – Birkhoff 原理与 Birkhoff 方程,Birkhoff 方程的建立问题,Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题,根据 Pfaff – Birkhoff – D'Alembert 原理组建运动方程,以及广义 Poisson 方法与动力学逆问题等。第 8 章论述广义 Birkhoff 系统动力学逆问题,包括广义 Pfaff – Birkhoff 原理与广义 Birkhoff 方程,根据运动性质组建广义 Birkhoff 方程,广义 Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题,根据微分变分原理组建运动方程,以及广义 Poisson 方法与动力学逆问题等。第 9 章简要介绍其他动力学逆问题,包括振动力学逆问题,多体动力学逆问题,转子动力学逆问题,结构动力学逆问题,弹性动力学逆问题等。

本书第 1 章 ~ 第 5 章的某些材料取自俄罗斯著名力学家 А. С. Галиуллин 1986 年的专著《动力学逆问题的解法》(俄文),

其余内容属于作者在国家自然科学基金(19072021,19272014,10272021,10572021,10772025)资助下取得的成果。在此对国家自然科学基金委员会和 Галиуллин 教授表示感谢。作者感谢崔尔杰院士、胡海岩院士、北京航空航天大学陆启韶教授和浙江理工大学罗绍凯教授的推荐意见,感谢北京理工大学理学院的领导和同事们的关心和支持,对解加芳博士、尚玫博士在书稿的精心排版和校对中的辛劳表示感谢。特别要感谢国防科技出版基金的资助。限于作者水平,书中难免有疏漏,敬请读者指正。

作 者

2008 年秋

目　录

Contents

第1章 动力学逆问题的基本提法和解法

根据给定的运动学元,或更一般地说,根据给定的运动性质,来确定力和力矩,乃是力学系统动力学的基本问题。这类问题及其各种变形问题,称为动力学逆问题。

动力学逆问题常常引起力学家、数学家和工程技术专家的关注。原因主要有两个。首先,动力学逆问题有非常广泛的应用。其次,动力学逆问题的最终解决尚有问题。随着科学技术的发展,用动力学逆问题来模拟许多实际问题成为可能,这使得动力学逆问题的概念本身也在不断扩充。不仅有确定广义力的问题,而且有确定力学系统的参数以及确定加在系统上的约束的问题,在这些广义力、参数以及约束下,力学系统可按给定的性质而运动。

本章从理论力学中质点动力学的第一类问题和历史上六个经典动力学逆问题开始,介绍动力学逆问题的近代三种基本提法和解法。

1.1 质点动力学第一类问题

运用质点运动微分方程,可解决质点动力学两类问题。

(1)已知质点的运动规律,求作用在质点上的力,称为质点动力学第一类问题。

(2)已知作用在质点上的力,求质点的运动规律,称为质点动力学第二类问题。

第二类问题是正问题,第一类问题则是逆问题。

例1　由地面垂直向上发射一火箭，在离地面高度为 h 时，火箭发动机熄灭。此时，火箭的质量为 m，铅直向上的速度为 v_0。已知火箭的速度 $\dot{z}$ 有如下表达式，即

$$\dot{z}^2 = v_0^2 + 2g\left(\frac{R^2}{z} - \frac{R^2}{R+h}\right) \tag{1.1.1}$$

式中：g 为重力加速度；R 为地球半径；z 为铅垂坐标。试求作用在火箭上的力。

解：将式(1.1.1)对时间 t 求导数，得

$$\ddot{z} = -\frac{gR^2}{z^2} \tag{1.1.2}$$

于是，作用在火箭上的力为

$$F = m\ddot{z} = -\frac{mgR^2}{z^2} \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)表明，作用在火箭上的力是万有引力。

例2　雪橇和运动员总质量 $m = 90\text{kg}$，沿光滑坡道 $y = 0.08x^2$ 下滑。设在 $x = 10\text{m}$ 时，雪橇的速度 $v = 5\text{m/s}$。求该瞬时雪橇作用于滑道的正压力 N[1]。

解：将质点运动微分方程向法向投影，得

$$m\frac{v^2}{\rho} = N - mg\cos\theta \tag{1.1.4}$$

式中：θ 为轨道切线与 Ox 轴夹角，有

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.16x \tag{1.1.5}$$

由曲率半径公式，有

$$\rho = \left|\frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}\right| = \frac{[1 + (0.16x)^2]^{3/2}}{0.16} \tag{1.1.6}$$

将式(1.1.5)、式(1.1.6)代入式(1.1.4)，并代入数字，得

$$N = 521.1\text{N} \tag{1.1.7}$$

从以上两个例子可以看出，解动力学逆问题的基本做法是将已知运动规律（例 1 是已知速度，例 2 是已知约束方程）对时间 t 求导数，再用 Newton 第二定律来求力（例 1 是主动力，例 2 是约束反力）。

1.2　六个经典动力学逆问题

本节研究动力学逆问题中的六个著名经典问题，即 Newton 问题、Bertrand 问题、Суслов 问题、Мещерский 问题、Чаплыгин – Горячев 问题、Poincaré – Cartan 问题[2]。这些问题的进一步推广就可给出动力学逆问题的各种可能提法。

1.2.1　Newton 问题

行星在力的作用下按 Kepler 定律运动，确定作用力的问题称为 Newton 问题，它是最原始也是最基础的动力学逆问题。

众所周知，Kepler 三定律如下。

(1)行星绕太阳按面积定律描出平面曲线。

(2)曲线是以太阳为焦点的椭圆。

(3)行星绕太阳转动的时间平方与其椭圆轨道长半轴的立方成正比。

Newton 问题的解法如下。

由第一条定律可知，有面积积分

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C \tag{1.2.1}$$

将其对时间求导数，得

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0 \tag{1.2.2}$$

这表明行星的加速度所有时间都通过原点，因此，作用力永远通过原点，力是有心力。

由第二条定律可知，行星轨道方程在极坐标下，有

$$r=\frac{1+e\cos\theta}{p} \tag{1.2.3}$$

由此得到

$$\frac{1}{r}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{1}{p} \tag{1.2.4}$$

根据 Binet 公式,力的代数值为

$$F=-\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}\right) \tag{1.2.5}$$

将式(1.2.4)代入式(1.2.5),得

$$F=-\frac{mC^2}{pr^2} \tag{1.2.6}$$

式中:C 为面积常数;p 为圆锥曲线参数。令

$$\mu=\frac{C^2}{p} \tag{1.2.7}$$

则有

$$F=-\frac{m\mu}{r^2} \tag{1.2.8}$$

由第三条定律可知,μ 不依赖于所论行星。实际上,面积常数 C 等于矢径扫过的面积与经历的时间的比值的 2 倍。如果 T 是周期,那么矢径在时间 T 扫过面积 πab,其中 a、b 为椭圆长、短半轴,因此,有

$$C=\frac{2\pi ab}{T} \tag{1.2.9}$$

因为

$$p=\frac{b^2}{a}$$

故有

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \tag{1.2.10}$$

由 Kepler 第三定律可知，a^3/T^2对所有行星都是同样的，因此对任何行星，有式(1.2.8)。

这样，每个行星受以太阳为中心的引力作用，引力的大小与行星质量成正比，与行星至太阳的距离平方成反比。

现在来确定引力常数。

行星、彗星，一般说所有物体都受到太阳的引力；行星的卫星，处于行星表面的物体，一般说所有物体也受到行星的引力，因此，也受到太阳的引力。设 M 为太阳质量；$m, m', m'', \cdots$为各个行星的质量；μ 为太阳引力系数，而 $\lambda, \lambda', \lambda'', \cdots$为行星引力系数。如果太阳和质量为 m 的行星相距为 r，那么太阳引力的绝对值等于 $m\mu/r^2$，而行星对太阳的引力等于 $m\lambda/r^2$。根据作用与反作用相等定律，这两个引力必相等，即有

$$m\mu = M\lambda, \frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m}$$

比较太阳与行星，得到一串等式

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda'}{m'} = \frac{\lambda''}{m''} = \cdots = f$$

式中：f 表示公比值。此时，太阳对任意行星的引力可写成

$$F = -\frac{fMm}{r^2} \tag{1.2.11}$$

式中：M 为太阳质量；m 为行星质量；f 为对所有行星的公有系数。

Newton 将上述结果推广到一切物体(质点)，从而得到万有引力定律：

质量为 m 和 m'的两质点，彼此相距为 r，则相互吸引力为 fmm'/r^2。

万有引力存在的实验证明和引力常数 f 的测定是 Cavendish

于 1798 年作出的。1859 年,法国天文学家 Le Verrier 发现水星近日点进动速率的数值与用万有引力定律算得的数值有每百年 38″的偏离[3]。

Newton 发现万有引力定律的方法是动力学逆问题的一种经典解法。

1.2.2 Bertrand 问题

根据给定的运动性质来确定力的更一般问题是 Newton 问题的进一步发展。这些更一般的问题之一就是 Bertrand 问题:寻求仅依赖于动点位置的有心力,在该力作用下质点在任何初始条件下可沿圆锥曲线运动。

因为这个问题的提出决定了许多更一般的动力学逆问题的提出,并且问题的解包含了 Newton 问题的解,因此,它引起了 19 世纪许多力学家和数学家的高度重视,如 Darboux、Arfvén。

现在来解 Bertrand 问题。

圆锥曲线的一般方程可表为

$$y = \alpha x + \beta + (ax^2 + 2bx + c)^{1/2} \tag{1.2.12}$$

它包含五个任意系数 α、β、a、b、c。将式(1.2.12)求两次导数,并用 y',y'',…表示 y 对 x 的导数,得到

$$y'' = (ac - b^2)(ax^2 + 2bx + c)^{-3/2}$$

因此,量 $y''^{-2/3}$ 是对 x 的二次多项式,而它的三阶导数等于零。用这种方法,Arfvén 给出圆锥曲线的微分方程

$$(y''^{-2/3})''' = 0 \tag{1.2.13}$$

这是一个 5 阶方程[4]。

研究质量为 1 的质点,在有心力 F_1 作用下运动,力仅依赖于点相对直角轴 O_1x_1、O_1y_1 的坐标(x_1,y_1),且力过原点 O_1。如果用 t_1 表示时间,那么运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t_1^2} = F_1 \frac{x_1}{r_1}, \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t_1^2} = F_1 \frac{y_1}{r_1} \tag{1.2.14}$$

其中

$$r_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$$

面积积分有

$$x_1 \frac{dy_1}{dt_1} - y_1 \frac{dx_1}{dt_1} = \alpha$$

作变换

$$x = \frac{x_1}{y_1}, y = \frac{1}{y_1} \tag{1.2.15}$$

并取

$$dt = -\frac{dt_1}{y_1^2}$$

于是有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y_1 \frac{dx_1}{dt_1} - x_1 \frac{dy_1}{dt_1}}{y_1^2} \frac{dt_1}{dt} = \alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{y_1^2} \frac{dy_1}{dt_1} \frac{dt_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt_1}$$

由此得到

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt_1^2} \frac{dt_1}{dt} = -F_1 \frac{y_1^3}{r_1} \tag{1.2.16}$$

式(1.2.16)表明，点(x,y)的运动对时间t的依赖关系如同一质点在平行于轴Oy的力作用下的情形，这个力为

$$Y = -F_1 \frac{y_1^3}{r_1} \tag{1.2.17}$$

力Y是x_1、y_1的函数，因此也是x、y的函数。如果点(x_1,y_1)描出圆锥曲线，那么点(x,y)也描出圆锥曲线，后者是前者的单一变换，反之亦然。

下面来求平行力 Y 的规律，在此力作用下质点在任何初始条件下都描出圆锥曲线。因为运动方程有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=Y$$

于是 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=\alpha$，而轨道微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{Y}{\alpha^2} \tag{1.2.18}$$

这里 Y 为 x、y 的函数。式(1.2.18)应满足圆锥曲线的微分方程式(1.2.13)。将式(1.2.18)代入式(1.2.13)，得到

$$Y=\mu[\varphi(x,y)]^{-3/2} \tag{1.2.19}$$

其中

$$[\varphi(x,y)]'''=0 \tag{1.2.20}$$

展开得

$$\varphi'''=\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+3y'\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+3y'^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}+y'^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+$$
$$3y''\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+y'\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+y'''\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1.2.21}$$

由式(1.2.18)、式(1.2.19)可得

$$y''=\frac{\mu}{\alpha^2}\varphi^{-3/2}$$

$$y'''=-\frac{3}{2}\frac{\mu}{\alpha^2}\varphi^{-5/2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

将其代入式(1.2.20)得

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+3y'\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+3y'^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}+y'^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+$$
$$\frac{3\mu}{2\alpha^2}\varphi^{-5/2}\left(2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{3\mu y'}{2\alpha^2}\varphi^{-5/2}\left[2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]=0$$

这个条件在任何初始条件下都成立，因此它对任何的 x、y、y'、α 应

恒满足，因为这四个量在运动初始时是任意的。因此，有

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}=0, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}=0, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2}=0, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}=0 \qquad (1.2.22)$$

$$2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0, 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=0 \qquad (1.2.23)$$

条件式(1.2.22)表明，函数 φ 是 x、y 的二次多项式，即有

$$\varphi(x, y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F \qquad (1.2.24)$$

这个多项式应满足条件式(1.2.23)。

下面分两种情形讨论。

(1) 当 $C \neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=2C$$

由等式(1.2.23)的第二个式子得到

$$\varphi=\frac{1}{C}(Bx+Cy+E)^2 \qquad (1.2.25)$$

直接验证可知，它也满足等式(1.2.23)的第一个式子。

(2) 当 $C=0$ 时，由等式(1.2.23)的第二个式子得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$$

即 φ 不依赖于 y，因此有

$$B=C=E=0$$
$$\varphi=Ax^2+2Dx+F \qquad (1.2.26)$$

而等式(1.2.23)的第一个式子显然满足。

将式(1.2.25)、式(1.2.26)分别代入式(1.2.19)，得到平行力的两种规律，即

(1) $$Y=\frac{\mu C^{3/2}}{(Bx+Cy+E)^3} \qquad (1.2.27)$$

(2) $$Y=\frac{\mu}{(Ax^2+2Dx+F)^{3/2}} \tag{1.2.28}$$

利用式(1.2.15)、式(1.2.17),可将以上两种规律在坐标(x_1,y_1)下表示出来,即

(1) $$F_1=-\frac{\mu r_1 C^{3/2}}{(Bx_1+Ey_1+C)^3} \tag{1.2.29}$$

(2) $$F_1=-\frac{\mu r_1}{(Ax_1^2+2Dx_1y_1+Fy_1^2)^{3/2}} \tag{1.2.30}$$

在极坐标 $x_1=r_1\cos\theta, y_1=r_1\sin\theta$ 下,表示为

(1) $$F_1=-\frac{\mu' r_1}{(Br_1\cos\theta+Er_1\sin\theta+C)^3} \tag{1.2.31}$$

(2) $$F_1=-\frac{\mu}{r_1^2(A\cos^2\theta+2D\sin\theta\cos\theta+F\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{1.2.32}$$

其中

$$\mu'=\mu C^{3/2}$$

式(1.2.31)、式(1.2.32)或式(1.2.29)、式(1.2.30)就是 Bertrand 问题的解答。在这些有心力作用下,质点将描出圆锥曲线,不依赖于运动的初始条件。

假设力仅依赖于 r_1,而不依赖于矢径方向角 θ,则在式(1.2.32)中应有 $D=0,A=F$,因此有

$$F_1=-\frac{\mu}{A^{3/2}r_1^2}$$

这就是 Newton 问题的解。

1.2.3 Суслов 问题

寻求力函数 U,由此力函数确定的力使完整力学系统按给定的积分而运动。这个逆问题称为 Суслов 问题,是 Суслов 于 1890 年提出的。在力为有势的假定下,这个问题是相当一般的动力学

逆问题。问题归结为构造力学系统运动方程的右端。

研究 Суслов 问题的最简单情形[2]。设单位质量的质点沿给定的平面曲线

$$\omega(x,y)=0 \tag{1.2.33}$$

而运动，试构造力函数 $U=U(x,y)$。

待求力函数 U 的集合由能量积分来确定。设质点的动能为 T，则

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

而能量积分为

$$T-U=h \tag{1.2.34}$$

式中：h 为积分常数。将式(1.2.33)对时间 t 求导数，得

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\dot{y}=0 \tag{1.2.35}$$

这个关系在任何时刻，对任何初始条件都成立。由关系式(1.2.35)可给出点的速度投影为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=N(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial y}+F_1(\omega,x,y)\\ \dot{y}&=-N(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial x}+F_2(\omega,x,y)\end{aligned} \tag{1.2.36}$$

式中：$N(x,y)$、$F_1(\omega,x,y)$、$F_2(\omega,x,y)$ 是积分式(1.2.33)给定域上的任意可微函数，并且 $F_1(0,x,y)=0$，$F_2(0,x,y)=0$。将式(1.2.36)代入式(1.2.34)，解得

$$U=\frac{1}{2}N^2(x,y)\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right]+\Phi(\omega,x,y)-h \tag{1.2.37}$$

其中

$$\Phi(\omega,x,y)=2N\left(F_1\frac{\partial\omega}{\partial y}-F_2\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)+F_1^2+F_2^2$$

为 $\omega(x,y)$ 定义域上的任意可微函数,且有

$$\Phi(0,x,y)=0 \tag{1.2.38}$$

由式(1.2.37)可知,Суслов 问题的解是一个集合。

1.2.4 Мещерский 问题

Мещерский 研究的变质量质点动力学逆问题,在理论和实际方面都有丰富的内容[5]。Мещерский 问题中需要确定点的质量变化规律和微粒的分离速度,使得在给定力场中变质量质点沿给定的轨道或按给定的规律而运动。

在 Bertrand 问题和 Суслов 问题中,是寻求整个力学系统的方程。在 Мещерский 问题中,这些方程的结构是已知的,而需要确定力学系统的参数和方程中出现的附加力,在这些参数和附加力下给定的运动是系统的一个可能运动,因而需要修改系统的相应运动方程。

下面讨论 Мещерский 问题的一个简单例子。一个质量为 $m=m(t)$ 的重质点在平面 Oyz 上运动,Oy 为水平轴,Oz 为铅垂轴。设所受阻力与质点速度方向相反,单位质量的介质阻力为 $f(z,v)$,其中 $v=\sqrt{\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ 为点的速度大小。令 $\mu=\mu(t)$,$\eta=\eta(t)$ 为微粒分离的绝对速度与质点本身速度在坐标轴 Oy、Oz 上投影之比。

变质量质点的运动微分方程表为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}&=Q_y+P_y\\\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}&=Q_z+P_z\end{aligned} \tag{1.2.39}$$

对上述问题,有

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$Q_y = -mf(z,v)\frac{\dot{y}}{v}, Q_z = -mg - mf(z,v)\frac{\dot{z}}{v}$$

$$P_y = \mu\dot{m}\dot{y}, P_z = \eta\dot{m}\dot{z}$$

于是,有

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= \dot{m}(\mu - 1)\dot{y} - mf(z,v)\frac{\dot{y}}{v} \\ m\ddot{z} &= \dot{m}(\eta - 1)\dot{z} - mf(z,v)\frac{\dot{z}}{v} - mg \end{aligned} \tag{1.2.40}$$

提出如下逆问题:要确定质量的变化规律 $m = m(t)$ 和与微粒分离速度有关的 μ,η,使得给定运动

$$y = \varphi(t), z = \psi(t) \tag{1.2.41}$$

是一种可能运动。

为解上述逆问题,将式(1.2.41)代入方程(1.2.40),解得

$$\begin{aligned} \mu &= 1 + \frac{m}{\dot{m}}\left[\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + \frac{f(\psi(t),v_0)}{v_0}\right] \\ \eta &= 1 + \frac{m}{\dot{m}}\left[\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{f(\psi(t),v_0)}{v_0}\right] \end{aligned} \tag{1.2.42}$$

这里假设排除了严格的铅垂运动和严格的水平运动,即 $\dot{\varphi} \neq 0, \dot{\psi} \neq 0$,而 $v_0 = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}$。为由式(1.2.42)确定 μ、η、m,尚需一个补充条件。

1.2.5 Чаплыгин – Горячев 问题

确定加在刚体质量几何和力的条件,使得刚体绕定点运动具有给定的积分,这类问题在动力学逆问题的形成与发展中,具有重要意义。许多著名力学家研究了这类问题。例如,Чаплыгин 给出刚体绕定点运动方程具有相对瞬时角速度在主轴上投影为线性的特殊积分[6]。Горячев 研究了更一般的情形:给定的积分对这些投影来说是一次和二次的整有理函数,其系数依赖于 Euler 角,

并且得到不仅对质量几何而且对加在作用于刚体上的力的条件[7]。

这类问题也归结为按已知积分来建立运动方程的问题。不同于前面研究的动力学逆问题的在于，一部分方程（运动学方程）完全由问题本身提法来确定。这部分方程为

$$\dot{\psi}=\frac{x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi}{\sin\theta},\dot{\theta}=x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi \qquad (1.2.43)$$
$$\dot{\varphi}=x_3-(x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi)\cot\theta$$

式中：x_1、x_2、x_3 是刚体瞬时角速度在过定点的惯性椭球主轴上的投影；ψ、θ、φ 为 Euler 角。同时，已知其余方程（动力学方程）的结构

$$A\dot{x}_1=(B-C)x_2x_3+M_1$$
$$B\dot{x}_2=(C-A)x_3x_1+M_2 \qquad (1.2.44)$$
$$C\dot{x}_3=(A-B)x_1x_2+M_3$$

问题是寻求加在对主轴的惯性矩 A、B、C 以及外力对这些主轴的主矩投影 M_1、M_2、M_3 上的相应条件。这样，式(1.2.43)和式(1.2.44)组成封闭方程组，允许有给定的特殊积分。

作为例子，来确定刚体定点转动 Lagrange 情形下存在规则进动的条件。在规则进动下，有

$$\theta=\theta_0,\dot{\psi}=n_1,\dot{\varphi}=n_2 \qquad (1.2.45)$$

于是，有三个特殊积分，即

$$\omega_1=x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi-n_1\sin\theta=0$$
$$\omega_2=x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi=0 \qquad (1.2.46)$$
$$\omega_3=x_3-n_1\cos\theta_0-n_2=0$$

Lagrange 情形下的动力学方程为

$$A\dot{x}_1 = (A - C)x_2x_3 + Mgz_cx_5$$

$$A\dot{x}_2 = (C - A)x_3x_1 - Mgz_cx_4 \tag{1.2.47}$$

$$\dot{x}_3 = 0$$

式中:z_c 为刚体重心到固定点的距离;Mg 为刚体重量,而

$$x_4 = \sin\theta_0\sin\varphi, x_5 = \sin\theta_0\cos\varphi \tag{1.2.48}$$

由式(1.2.46)解得

$$x_1 = n_1\sin\theta_0\sin\varphi, x_2 = n_1\sin\theta_0\cos\varphi, x_3 = n_1\cos\theta_0 + n_2 \tag{1.2.49}$$

将式(1.2.49)对 t 求导数,并注意到 $\dot{\varphi} = n_2$,得

$$\dot{x}_1 = n_1n_2\sin\theta_0\cos\varphi, \dot{x}_2 = -n_1n_2\sin\theta_0\sin\varphi, \dot{x}_3 = 0 \tag{1.2.50}$$

将式(1.2.50)代入式(1.2.47),消去 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$,得

$$\begin{aligned} Mgz_cx_5 &= (C - A)x_2x_3 + An_1n_2\sin\theta_0\cos\varphi \\ Mgz_cx_4 &= (C - A)x_3x_1 + An_1n_2\sin\theta_0\sin\varphi \end{aligned} \tag{1.2.51}$$

这就是关系式(1.2.46)为方程组(1.2.47)的积分的条件。再将式(1.2.48)、式(1.2.49)代入式(1.2.51),得到刚体绕定点运动 Lagrange 情形存在规则进动的条件为

$$Mgz_c + (A - C)n_1^2\cos\theta_0 = Cn_1n_2 \tag{1.2.52}$$

特别地,当 $z_c = 0, n_1 \neq 0$ 时,由式(1.2.52)得到关系

$$(A - C)n_1\cos\theta_0 = Cn_2 \tag{1.2.53}$$

这就是对称刚体绕定点按惯性运动时存在规则进动的必要条件。

1.2.6 Poincaré – Cartan 问题

如果系统的运动方程有正则方程的形式,那么系统存在 Poincaré – Cartan 积分不变量

$$J = \oint(p_s\Delta q_s - H\Delta t) = 常数 \tag{1.2.54}$$

这个问题的逆问题是：建立系统的运动方程，使之具有 Poincaré - Cartan 积分不变量（式(1.2.54)）。答案是：系统的运动方程有 Hamilton 正则方程的形式。

以上所述动力学逆问题的六个经典问题，在动力学逆问题的研究中具有基础性意义。这些问题的解决以及物理解释的进一步扩充，开辟了自然科学中的一些新原理和新现象，某些逆问题本身就是运动控制科学现代领域形成与发展中的原始问题。例如，Newton 问题的解导致最重要的自然规律之一——万有引力定律；Cartan 问题的解导致分析力学的新型原理；刚体定点运动问题，变质量质点动力学以及 Суслов 问题的数学推广，现时已成为星际航行学、火箭动力学和规划运动系统构成理论的基本问题。

1.3 动力学逆问题的提法

1.3.1 动力学逆问题的定义

将 1.1 节、1.2 节中所研究的经典逆问题加以推广，便可给出动力学逆问题的定义。

所谓动力学逆问题是指，确定加在力学系统上的主动力和力矩，系统的参数以及加在其上的约束问题，系统在这些力、力矩、参数及约束下，按给定性质的运动是系统的一个可能的运动。

运动性质可用各种方法给定，如对坐标和速度的定量和定性限制，系统的积分不变量等。

力学系统的状态用广义坐标矢量 $\boldsymbol{q}[q_1,q_2,\cdots,q_n]$ 和广义速度矢量 $\dot{\boldsymbol{q}}[\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n]$ 来确定，而运动性质用流形

$$\Omega:\omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=c_\mu\quad(\mu=1,2,\cdots,m\leqslant n)\qquad(1.3.1)$$

来给定，其中某些常数 c_μ 可以是零。假设函数 $\omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\in C^1$，而等式(1.3.1)当 $t\geqslant t_0$ 时在相空间某域 $G\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\}$ 上是相容的且独立的。运动性质的给定流形 Ω，实际上是所论力学系统的积分流

形。因此,为解动力学逆问题,自然需要按给定积分流形 Ω 来建立力学系统的运动方程,使得表达式(1.3.1)是方程的第一积分($c_\mu \neq 0$)或特殊积分($c_\mu = 0$),并且由所组建的运动方程来确定待求的广义力、参数和约束,允许系统按给定性质式(1.3.1)而运动。

在特殊情形,当已知运动方程的结构,不知道为确保系统按给定性质而运动所必须的补充力和参数,就需要按给定的积分流形预先确定运动方程并由修改了的方程求出待求未知量。当事先仅仅知道系统的一部分运动方程时,为解动力学逆问题,需按给定的积分流形来建立短少的方程,并由封闭方程组确定待求的广义力、参数和约束,在这些力、参数和约束下,按给定性质的运动是可能的运动。

因此,动力学逆问题的解在足够一般的数学解释下,归结为按表示运动性质的给定积分流形来建立力学系统的运动方程。

1.3.2 动力学逆问题的三种基本提法

研究用常微分方程描述的力学系统,建立运动方程的问题有以下三种基本提法[2]。

1. 建立运动方程的基本问题

按给定的积分流形

$$\Omega: \omega_\mu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = c_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots, m \leqslant n) \tag{1.3.2}$$

来构造方程组

$$\ddot{q}_\nu = Q_\nu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.3.3}$$

2. 运动方程的修改

给定方程组

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \nu, t) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.3.4}$$

按给定的积分流形

$$\Omega: \omega_\mu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = c_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots, m \leqslant n) \tag{1.3.5}$$

来确定矢量函数 $\boldsymbol{v}[v_1(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t),\cdots,v_k(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)]$。

3. 运动方程的封闭

给定方程组

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{1.3.6}$$

按给定的积分流形

$$\Omega:\omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = c_\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,m \leqslant r) \tag{1.3.7}$$

来建立封闭方程组

$$\ddot{u}_\rho = U_\rho(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t) \quad (\rho = 1,2,\cdots,r) \tag{1.3.8}$$

在这些问题中假设，待求函数 $Q_\nu, v_\chi, U_\rho(\nu=1,2,\cdots,n;\chi=1,2,\cdots,k;\rho=1,2,\cdots,r)$ 属于使给定流形 Ω 的某 ε 邻域 Ω_ε 的解存在唯一的一类函数，并且如果示点初始时刻在积分流形 Ω 上，那么以后它也沿这个流形运动。

当然，上面指出的建立运动方程的各种提法不是唯一可能的。例如，可认为给定的运动性质仅依赖于一部分 $\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$，而这些性质或者只是几何的，或者只是运动学的；运动性质可以由不等式给出；可以认为，所建立的某些方程可以是一阶微分方程等。但是，建立微分方程的所有这些可能的变化，无论从其实际意义还是从方法上说，它的解答完全包含于上面指出的问题提法的基本变形之中。

前述建立微分方程的动力学逆问题的各种提法，实质上是某些已知动力学逆问题的数学推广。建立运动方程的基本问题是 Newton 问题、Bertrand 问题、Суслов 问题和 Cartan 问题的进一步推广。运动方程的修改问题是 Мещерский 问题的数学推广。运动方程的封闭问题是 Горячев 问题的进一步推广。

1.4 用建立运动方程的方法来解动力学逆问题

1.4.1 微分方程理论中的逆问题

动力学逆问题的解归结为常微分方程理论中逆问题的解，即

按照给定的第一积分或特殊积分来建立或补建微分方程本身。

微分方程理论中的逆问题,作为按给定特殊积分建立方程组集合的问题,首先由苏联学者 Еругин Н П 所研究[8],并给出问题的解法。Еругин 提出的按给定特殊积分来建立微分方程的方法,不仅可按运动的给定性质来建立力学系统的运动方程,而且可考虑到一些补充要求,例如,稳定性要求,优化要求,来建立这些方程。为解动力学逆问题,按 Еругин 方法,首先建立使给定的积分组成要建立的微分方程组的积分流形的充要条件。这些条件可由把给定积分按待求方程组组成的导数看成为任意函数而得到。当 $c_\mu=0$ 时,这些函数在给定的积分流形上变为零;当 $c_\mu\neq 0$ 时,这些函数简单地取为零。所得的等式是所论力学系统给定运动存在的必要条件,当然还需要满足系统的初始状态。

1.4.2 动力学逆问题的三种基本解法

在建立运动方程的基本问题情形,存在按给定性质式(1.3.2)而运动的必要条件由下式描述,即

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu+\frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\nu}Q_\nu+\frac{\partial \omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\omega,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\mu=1,2,\cdots,m;\nu=1,2,\cdots,n)\qquad(1.4.1)$$

式中:$\Phi_\mu(\omega,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$是一些函数,称为 Еругин 函数。当 $c_\mu\neq 0$ 时,$\Phi_\mu=0$;当 $c_\mu=0$ 时,Φ_μ 为在积分流形式(1.3.2)上趋于零的任意函数。条件式(1.4.1)作为对函数 Q_ν 的原始方程。本节及以后相同指标表示求和。

在方程的修改问题中,存在按给定性质式(1.3.5),而运动的必要条件仍然是式(1.4.1)。设由条件(1.4.1)作为可确定函数 $Q_\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$,据问题的提法它们应与方程式(1.3.4)重合,因此有

$$Q_{0\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\nu,t)=Q_\nu\quad(\nu=1,2,\cdots,n)\qquad(1.4.2)$$

此时所得等式(1.4.2)组成对函数 $v_\chi(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\chi=1,2,\cdots,k)$ 的方程组,最终可确定出待求补充力和参数。

在解方程的封闭问题时,存在按给定性质式(1.3.7),而运动的必要条件有如下形式,即

$$\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial u_\rho}U_\rho+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_\nu}Q_{0\nu}+\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu+\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial u_\rho}\dot{u}_\rho+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\mu=1,2,\cdots,m;\nu=1,2,\cdots,n;\rho=1,2,\cdots,r)\qquad(1.4.3)$$

其中

$$\dot{\omega}_\mu=\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_\nu}Q_{0\nu}+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}\qquad(1.4.4)$$

条件式(1.4.3)是为寻求函数 U_ρ 的原始方程组。

在解上述三种动力学逆问题时,运动方程具有给定积分流形式(1.3.1),而待求方程组可以各种形式表示出来。这依赖于方程右端部分的函数 $Q_{0\nu}$、U_ρ 取怎样的形式。每个动力学逆问题一般说都有非单一解。这是因为,第一,方程式(1.4.1)在 $m<n$ 时,不能唯一确定未知函数 $Q_{0\nu}$、U_ρ;第二,当 $c_\mu=0$ 时,这些方程还包含任意函数 $\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$。当然,使这些函数在积分流形上变为零的条件,以及解在域 Ω_ε 存在和唯一条件,并不能消除这种非单一性。这种非单一性允许在解动力学逆问题时,考虑到其他需要,如稳定性、优化等。

1.5 运动方程的建立

1.5.1 运动方程的建立

运动方程的建立问题归结为按给定的积分流形式(1.3.1)来建立方程式(1.3.3)。

按给定性质式(1.3.1)而运动的条件式(1.4.1),可改写为

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_\nu}Q_\nu = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - \varphi_\mu \quad (\mu=1,2,\cdots,m;\nu=1,2,\cdots,n) \tag{1.5.1}$$

其中

$$\varphi_\mu = \frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial\omega_\mu}{\partial t} \tag{1.5.2}$$

而 $\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 称为 Еругин 函数。当 $c_\mu \neq 0$ 时，它们恒为零；当 $c_\mu = 0$ 时，它们是在积分流形 Ω 上变为零的任意函数。例如，变量 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 在 $t \geqslant t_0$ 时在域 Ω_ε 上的全纯函数，其展开式从不低于一阶开始。

方程式(1.5.1)可用于确定待求方程式(1.3.3)的右端 Q_ν。当 $m=n$ 时，直接解方程式(1.5.1)，得到

$$\ddot{q}_\nu = Q_\nu = \frac{\Delta_{i\nu}}{\Delta}(\Phi_i - \varphi_i) \quad (i,\nu = 1,2,\cdots,m) \tag{1.5.3}$$

其中

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_s}\right)_{m\times m} \neq 0$$

而 $\Delta_{i\nu}$ 为行列式 Δ 的元素 (i,ν) 的代数余子式。

如果 $m<n$，可将右端函数 Q_σ 表示为[2]

$$Q_\sigma = Q_\sigma^\nu + Q_\sigma^\tau \quad (\sigma = 1,2,\cdots,n) \tag{1.5.4}$$

其中 Q_σ^ν 与流形

$$\Omega_{\dot{q}}\{\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)_{q=inv} = 0\} \tag{1.5.5}$$

正交并精确到 Lagrange 乘子 λ_i 而确定为

$$Q_\sigma^\nu = \lambda_i\frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{q}_\sigma}(\sigma=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,m) \tag{1.5.6}$$

而 Q_σ^τ 为沿流形式(1.5.5)的分量，由下述条件确定，即

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\sigma} Q_\sigma^\tau = 0 \quad (\sigma = 1,2,\cdots,n;\mu = 1,2,\cdots,m) \tag{1.5.7}$$

将式(1.5.4)代入运动存在条件式(1.5.1),并注意到式(1.5.7),得到

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\sigma} Q_\sigma^\nu = \Phi_\mu - \varphi_\mu \tag{1.5.8}$$

将式(1.5.6)代入式(1.5.8),得到

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\sigma} \lambda_i = \Phi_\mu - \varphi_\mu \quad (i,\mu = 1,2,\cdots,m) \tag{1.5.9}$$

当

$$\Gamma = \det\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\sigma} \right)_{m\times m} \neq 0$$

时,由式(1.5.9)解得

$$\lambda_i = \frac{1}{\Gamma} \Gamma_{ji} (\Phi_j - \varphi_j) \quad (i,j = 1,2,\cdots,m) \tag{1.5.10}$$

式中:Γ_{ji}为行列式 Γ 元素(j,i)的代数余子式。因此,有

$$Q_\sigma^\nu = \frac{1}{\Gamma} \Gamma_{ji} (\Phi_j - \varphi_j) \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{1.5.11}$$

另一分量 Q_σ^τ 可由直接解线性方程式(1.5.7)而得到,并表示为

$$Q_r^\tau = -D^{rs} P_s \quad (r = 1,2,\cdots,m;s = m+1,m+2,\cdots,n)$$

$$Q_s^\tau = -DP_s \quad (s = m+1,m+2,\cdots,n)$$

(1.5.12)

其中

$$D = \det\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \dot{q}_s} \right)_{m\times m}$$

而 D^{rs} 为 D 的第 r 列用矩阵 $\left(\dfrac{\partial\omega_r}{\partial\dot{q}_s}\right)_{m\times n}$ 的第 s 列替代而得行列式，$P_s=P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 是任意函数。于是，待求方程组(1.3.2)可表示为如下形式，即

$$\ddot{q}_r = \frac{1}{\Gamma}\Gamma_{ji}(\Phi_j - \varphi_j)\frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{q}_r} - D^{rs}P_s$$

$$(i,j,r = 1,2,\cdots,m;s = m+1,m+2,\cdots,n) \qquad (1.5.13)$$

$$\ddot{q}_s = \frac{1}{\Gamma}\Gamma_{ji}(\Phi_j - \varphi_j)\frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{q}_s} + DP_s \quad (s = m+1,m+2,\cdots,n)$$

方程组(1.5.13)中包含未定函数 $\Phi_j(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$（当 $C_j=0$ 时）以及 $P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$（当 $m<n$ 时）。方程组(1.5.13)可用于解许多动力学逆问题。

1.5.2 行星的 Kepler 运动

利用前面给出的方法来解 Newton 问题。行星的运动性质写成

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1 = r - ex = p \quad (r=(x^2+y^2)^{1/2}) & (1.5.14)\\ \omega_2 = x\dot{y} - \dot{x}y = c & (1.5.15)\end{cases}$$

这些性质是行星运动方程

$$\ddot{x} = X(x,y),\ddot{y} = Y(x,y) \qquad (1.5.16)$$

的第一积分。

首先，只利用面积积分式(1.5.15)来建立运动方程。行星运动方程式(1.5.16)有这个积分的充要条件为

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial\dot{x}}X + \frac{\partial\omega_2}{\partial\dot{y}}Y + \frac{\partial\omega_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y}\dot{y} = 0$$

即

$$xY - yX = 0 \tag{1.5.17}$$

由此直接得到方程式(1.5.16)的右端部分为

$$X = xV(x,y), Y = yV(x,y) \tag{1.5.18}$$

其中包含一个任意函数 $V(x,y)$。其次，利用轨道方程式(1.5.14)来确定这个函数。将式(1.5.14)对 t 求两次导数，并利用式(1.5.16)，得到

$$\frac{c^2}{r^3} + \frac{x}{r}X + \frac{y}{r}Y - eX = 0 \tag{1.5.19}$$

将式(1.5.18)代入式(1.5.19)，并利用式(1.5.14)，得

$$V(x,y) = -\frac{c^2}{pr^3} \tag{1.5.20}$$

于是，质量为 m 的行星运动方程为

$$m\ddot{x} = -\frac{mc^2}{p}\frac{x}{r^3}, m\ddot{y} = -\frac{mc^2}{p}\frac{y}{r^3} \tag{1.5.21}$$

1.6 运动方程的修改

1.6.1 运动方程的修改

在力学系统运动方程的修改问题中，方程

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{\nu}, t) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{1.6.1}$$

的结构是已知的，需要确定系统参数的函数 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 以及加在系统上的补充力，使得力学系统按给定性质

$$\Omega: \omega_\mu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = c_\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,m \leqslant n) \tag{1.6.2}$$

的运动是一个可能的运动。

运动方程的修改问题，可按以下步骤进行：第一步，建立微分方程组，对此方程组来说，给定的流形 Ω 是积分，这个方程组可表

为式(1.5.13);第二步,使这个方程组的右端部分等于给定方程组(1.6.1)的右端部分,即

$$\frac{1}{\Gamma}\Gamma_{ji}\left(\Phi_j - \frac{\partial\omega_j}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma - \frac{\partial\omega_j}{\partial t}\right)\frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{q}_\nu} + Q_\nu^\tau = Q_{0\nu}^\tau(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\nu},t)$$

$$(\sigma,\nu=1,2,\cdots,n;i,j=1,2,\cdots,m) \tag{1.6.3}$$

其中 Q_ν^τ 由式(1.5.12)给出;第三步,由式(1.6.3)确定待求函数 $v_\chi(\chi=1,2,\cdots,k)$。

为最终解决所论动力学逆问题,需由式(1.6.3)解出 ν_χ。这就需要对出现于式(1.6.3)中的函数 Φ_j(当 $c_j=0$ 时)和 Q_{m+1}^τ,$Q_{m+2}^\tau,\cdots,Q_n^\tau$ 施加一些补充限制,以及对给定的数 n、m、k 的关系施加限制。

1.6.2 自激陀螺

现在研究自激陀螺运动方程的修改问题。

陀螺运动方程有如下形式,即

$$\begin{aligned} A\dot{x}_1 &= (B-C)x_2x_3 + M_1 \\ B\dot{x}_2 &= (C-A)x_3x_1 + M_2 \\ C\dot{x}_3 &= (A-B)x_1x_2 + M_3 \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

式中:A、B、C 为陀螺的惯性主矩;$\omega(x_1,x_2,x_3)$ 为陀螺瞬时角速度;$M(M_1,M_2,M_3)$ 为对固定点的力矩,它们依赖于瞬时角速度在主轴上的投影 x_1、x_2、x_3。

提出如下逆问题:确定阻力矩 M,使得陀螺按下述给定性质,即

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1 = e^{2\lambda t}T = 常数 \\ \omega_2 = e^{2\lambda t}G^2 = 常数\end{cases} \tag{1.6.5}$$

发生运动,其中

$$T = \frac{1}{2}(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2)$$

为陀螺的动能，而

$$G^2 = A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2$$

为对固定点的动量矩的平方，λ 为正的常数。

为解上述问题，将式(1.6.5)对 t 求导数，并利用方程式(1.6.4)，得到按性质式(1.6.5)而运动的存在条件，即

$$\begin{aligned} x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3 &= -2\lambda T \\ Ax_1M_1 + Bx_2M_2 + Cx_3M_3 &= -\lambda G^2 \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

由此解出 M_1、M_2，有

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{-\lambda(2BT - G^2) + M_3(C-B)x_3}{x_1(B-A)} \\ M_2 &= \frac{-\lambda(G^2 - 2AT) + M_3(A-C)x_3}{x_2(B-A)} \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

式中：M_3 是 x_1、x_2、x_3 的任意函数。可见，问题的解包含一个任意函数，它可由某些补充要求来确定。例如，要求阻力矩借助摩擦力来实现，使 $M_3 = -\lambda Cx_3$，此时待求阻力矩的其他两个投影由式(1.6.7)得出

$$M_1 = -\lambda Ax_1, M_2 = -\lambda Bx_2 \quad (1.6.8)$$

因此，陀螺运动方程为

$$\begin{aligned} A\dot{x}_1 &= (B-C)x_2x_3 - \lambda Ax_1 \\ B\dot{x}_2 &= (C-A)x_3x_1 - \lambda Bx_2 \\ C\dot{x}_3 &= (A-B)x_1x_2 - \lambda Cx_3 \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

这就是按给定性质完全修改了运动。

1.7 运动方程的封闭

1.7.1 运动方程的封闭

在运动方程的封闭的动力学逆问题中，一部分运动方程(例如，系统基本对象的方程)是事先已知的，即

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{1.7.1}$$

需要建立必要数量的方程(例如，描述辅助装置运动的方程)

$$\ddot{u}_\rho = U_\rho(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t) \quad (\rho = 1,2,\cdots,r) \tag{1.7.2}$$

使得方程组(1.7.1)为封闭方程组，且给定流形

$$\Omega: \omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = c_\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,m \leqslant r) \tag{1.7.3}$$

是该系统的积分流形。

这类问题中假设函数 $\omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 除上面指出的要求外，还满足如下补充要求：在相空间某域 $G(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t)$ 上当 $t \geqslant t_0$ 时，有

$$\dot{\omega}_\mu = \left\{ \frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\nu} Q_{0\nu} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial t} \right\} \in C^1 \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{1.7.4}$$

为解运动方程的封闭问题，首先组成运动存在的条件式(1.4.3)，将其改写为

$$\frac{\partial \dot{\omega}_\mu}{\partial \dot{u}_\rho} U_\rho = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - \varphi_\mu^* \quad (\rho = 1,2,\cdots,r) \tag{1.7.5}$$

其中

$$\varphi_\mu^* = \frac{\partial \dot{\omega}_\mu}{\partial \dot{q}_\nu} Q_{0\nu} + \frac{\partial \dot{\omega}_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial \dot{\omega}_\mu}{\partial u_\rho}\dot{u}_\rho + \frac{\partial \dot{\omega}_\mu}{\partial t}$$

$$(\nu = 1,2,\cdots,n;\rho = 1,2,\cdots,r) \tag{1.7.6}$$

然后，由这些条件可确定出待求方程式(1.7.2)的右端部分。最

终，封闭方程组有如下形式，即

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},t)$$

$$\ddot{u}_\rho = \frac{1}{\Gamma^*}\Gamma_{ji}^*(\Phi_j - \varphi_j^*)\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\dot{u}_\rho} + U_\rho^\tau \quad (i,j=1,2,\cdots,m)$$

(1.7.7)

其中

$$\Gamma^* = \det\left(\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\dot{u}_\rho}\frac{\partial\dot{\omega}_j}{\partial\dot{u}_\rho}\right)_{m\times m} \neq 0 \quad (\rho=1,2,\cdots,r)$$

Γ_{ji}^* 为行列式 Γ^* 的元素(j,i)的代数余子式；$\Phi_j = \Phi_j(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$是一些函数，当 $c_j \neq 0$ 时它们为零，当 $c_j = 0$ 时它们是任意的，而当 $\boldsymbol{\omega}=0$ 时等于零；U_ρ^τ 满足条件

$$\frac{\partial\dot{\omega}_\mu}{\partial\dot{u}_\rho} + U_\rho^\tau = 0 \quad (\rho=1,2,\cdots,r;\mu=1,2,\cdots,m) \quad (1.7.8)$$

可见，运动方程封闭问题的解在问题提法的范围内，也包含未定函数 Φ_j（当 $c_j=0$ 时）以及 U_ρ^τ（当 $r<m$ 时）。

1.7.2 微分追踪

研究两质点在运动中彼此微分追踪问题。

设给定质量为 m_0 的质点 M_0 的运动方程

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{F}_0 \quad (1.7.9)$$

式中：$\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)$ 为加在点 M_0 上的力；$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{v}$ 为点 M_0 和 M 的矢径和速度。确定加在质量为 m 的质点 M 上的力 $\boldsymbol{F}$，使得两点 M_0、M 按性质

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1 = |\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}| = l = 常数 \\ \omega_2 = (\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}) = 0\end{cases} \quad (1.7.10)$$

的运动是它们的可能运动。

运动性质式(1.7.10)表示两个点 M_0 和 M 的运动与长 l 的刚性杆 M_0M 端点的运动是运动学等价的。

所论问题的解最终归结为建立封闭微分方程组

$$\begin{aligned} m_0\ddot{r}_0 &= F_0(r_0 - r, v_0 - v) \\ m\ddot{r} &= F(r_0, r, v_0, v) \end{aligned} \tag{1.7.11}$$

由式(1.7.10)看出 $\dot{\omega}_1 = \omega_2$。将式(1.7.10)第二式对时间 t 求导数,引进 Еругин 函数 Φ,并利用式(1.7.11),得到

$$(v_0 - v)^2 + (r_0 - r)\left(\frac{F_0}{m_0} - \frac{F}{m}\right) = \Phi(\omega_1, \omega_2, r_0, r, v_0, v, t) \tag{1.7.12}$$

其中

$$\Phi|_\Omega = 0$$

方程式(1.7.12)就是确定未知力 F 的方程。方程只有一个,未知量有四个:F 的三个投影和函数 Φ。当给定 F 的两个投影和 Φ 时,才能确定 F 的第三个投影。因此,为最终解决问题尚需给出不与式(1.7.10)相悖的有关质点运动的补充性质。

参考文献

[1] 贾书惠,张怀瑾.理论力学辅导.北京:清华大学出版社,1997.

[2] Галиуллин А С. Методы Решения Обрадных Задач Динамики. Москва: Наука, 1986.

[3] 中国大百科全书编委会.中国大百科全书 力学.北京:中国大百科全书出版社,1985.

[4] Appell P. Traité de Mécanique Rationnelle. Tome 1. Paris: Gautier – Villars et C[ie], 1953.

[5] Мещерский И В. Работы по Механике Тел Переменной Массы. Москва: Гостехиздат, 1950.

[6] Чаплыгин С А. Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела,

подпертого в одной точке. Соб Соч Т 1, Москва, 1948.

[7] Горячев Д Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.

[8] Еругин Н П. Построение всего множества снстем диффеpeниинальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. ПММ, 1952, 16(6): 659 – 670.

第 2 章　分析动力学中的逆问题

Lagrange1788 年出版名著 *Mécanique Analytique*（分析力学）。200 多年来，分析力学这一经典学科由于 Hamilton、Jacobi、Hertz、Poincaré、Ляпунов、Birkhoff 等众多学者的卓越贡献，已经取得了辉煌成就。Lagrange 的名著 1995 年被译成英文这一事实就证明了分析力学这棵大树之根深，分析力学的近代发展，特别是它的几何化表明了分析力学这棵大树之叶茂。分析力学是经典物理学的基石之一，是近代物理学的阶梯。同时，分析力学又是许多数学理论的发源地和应用对象。很难指出物理—数学科学的其他领域能够像分析力学这样把抽象的数学研究与具体的物理内容如此深刻地结合起来。分析力学不仅是自然和技术的最复杂、多方面问题科学研究的精美工具，而且运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的限制[1]。

分析力学的基本原理和基本运动微分方程都起源于某些基本概念，如约束、虚位移等。由基本概念出发，提出基本原理，由基本原理导出基本运动微分方程，研究方程本身和它的积分方法，这就是分析力学的基本内容。

分析动力学问题可分为两类，即正问题和逆问题。正问题是指，根据分析力学的基本原理或基本运动微分方程来研究系统的运动性质（积分）或求得运动规律（最终解）。逆问题大体上是指，根据运动性质（积分）来组建运动微分方程。

本章研究分析动力学中的一些逆问题，主要侧重完整系统。有关非完整系统动力学逆问题将在第 6 章中研究。完整系统分析动力学逆问题包括广义坐标中 Lagrange 方程的建立、正则方程的建立、Суслов 问题、Noether 对称性与动力学逆问题、Bertrand 定理

的推广、正则变换与动力学逆问题、Poisson 定理与动力学逆问题等。

2.1 广义坐标中 Lagrange 方程的建立

Lagrange 力学正问题是由 Lagrange 方程出发来研究系统的运动性质或运动规律。本节研究的逆问题是按给定的运动性质来建立 Lagrange 方程。

2.1.1 Lagrange 方程的建立

组建力学系统在广义坐标中的方程，使得按给定性质的运动是系统的一个可能的运动。逆问题的提法如下：研究一力学系统，其动力学普遍方程，或 D'Alembert - Lagrange 原理有如下形式，即

$$\left(Q_\nu+\frac{\partial T}{\partial q_\nu}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right)\delta q_\nu=0 \quad (\nu=1,2,\cdots,n) \tag{2.1.1}$$

式中：q_ν 为广义坐标；T、Q_ν 分别为考虑到事先加在系统上的完整约束而计算出的动能和广义力。要求按给定性质

$$\Omega:\omega_\mu(\boldsymbol{q},t)=0 \quad (\mu=1,2,\cdots,m;m\leqslant n) \tag{2.1.2}$$

的运动是系统的一个可能运动，其中 ω_μ 为对所有 $t\geqslant t_0$ 在某域 $G\{\boldsymbol{q}\}$ 上的独立、有界、连续可微函数，并要求组建广义坐标中的方程。

在组建运动方程时，式(2.1.2)应作为补充约束来研究。因此，无论相应示点沿流形 Ω 的运动，还是在流形 Ω 之外的运动，广义速度满足条件

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},t) \quad (\mu=1,2,\cdots,m;\nu=1,2,\cdots,n) \tag{2.1.3}$$

式中：Еругин 函数 $\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},t)$ 是任意函数，当满足条件式

(2.1.2)时它们变为零。

下面导出问题式(2.1.1)、式(2.1.2)的运动方程。约束式(2.1.2)加在虚位移 δq_ν 上的限制为

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_\nu}\delta q_\nu = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,m;\nu = 1,2,\cdots,n) \qquad (2.1.4)$$

假设由式(2.1.4)可将不独立的变分 $\delta q_\mu(\mu = 1,2,\cdots,m)$ 用独立的变分 $\delta q_\rho(\rho = m+1,m+2,\cdots,n)$ 表示出来,记作

$$\delta q_\mu = C_{\mu\rho}\delta q_\rho \quad (\mu = 1,2,\cdots,m;\rho = m+1,m+2,\cdots,n) \qquad (2.1.5)$$

将式(2.1.5)代入原理式(2.1.1),并注意到 δq_ρ 的独立性,得到

$$Q_\rho + \frac{\partial T}{\partial q_\rho} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} + \left(Q_\mu + \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right)C_{\mu\rho} = 0$$

$$(\rho = m+1,m+2,\cdots,n;\mu = 1,2,\cdots,m) \qquad (2.1.6)$$

这样,就得到问题的运动方程式(2.1.6)、式(2.1.3)。

所得到的方程允许系统按给定性质 Ω 而运动,并且仅当初始条件 $t = t_0, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0$ 满足条件

$$\omega_\mu(\boldsymbol{q}_0, t_0) = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,m) \qquad (2.1.7)$$

时,这个运动才存在。自然可假设条件式(2.1.7)实际上不满足。因此,要求当系统有对条件式(2.1.7)的初始偏离时,相对给定性质式(2.1.2)是稳定的,或渐近稳定的。这个要求可用来选取尚未确定的函数 Φ_μ。

2.1.2 算例

例1 质量为 m 的质点在重力作用下在平面 Oxy 上运动。要求按给定性质

$$\omega = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \qquad (2.1.8)$$

的运动是一个可能运动，其中 a、b 为常数。试组建问题的运动微分方程。

D'Alembert – Lagrange 原理给出

$$(-m\ddot{x})\delta x + (-m\ddot{y} - mg)\delta y = 0 \tag{2.1.9}$$

式(2.1.4)给出

$$\frac{y}{b^2}\delta y - \frac{x}{a^2}\delta x = 0 \tag{2.1.10}$$

将式(2.1.10)代入式(2.1.9)，得到

$$\left\{-m\ddot{x} + (-m\ddot{y} - mg)\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right\}\delta x = 0$$

由 δx 的任意性得到

$$m\ddot{x} + (m\ddot{y} + mg)\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = 0 \tag{2.1.11}$$

式(2.1.3) 给出

$$\frac{y}{b^2}\dot{y} + \frac{x}{a^2}\dot{x} = \Phi(\omega, x, y, t) \tag{2.1.12}$$

式(2.1.11)、式(2.1.12) 就是问题的解。如果限于沿曲线式(2.1.8) 的运动，则有 $\Phi = 0$。

例 2　质点沿斜驶线的运动

质量为 m 的质点动力学普遍方程在球坐标中有如下形式，即

$$\begin{aligned}&\{mR[\ddot{\varphi} - (\dot{\psi} + \tau)^2\sin\varphi\cos\varphi] - F_\varphi\}\delta\varphi + \\ &\{mR[\ddot{\psi}\sin\varphi + 2\dot{\varphi}(\dot{\psi} + \tau)\cos\varphi] - F_\psi\}\delta\psi = 0\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

式中：φ、ψ 为球坐标，ψ 为经度，φ 为纬度的余角；R、τ 分别为地球半径和角速度；F_φ、F_ψ 分别为加在质点上的力在经线切线和纬线切线上的投影。要求质点在地球表面沿斜驶线

$$\Omega: \omega = \ln\frac{\tan\varphi/2}{\tan\varphi_0/2} - (\psi - \psi_0)\cot\alpha = 0 \tag{2.1.14}$$

的运动是质点的一个可能运动，其中 φ_0、ψ_0 为球坐标的初始值，α

为点的轨道与地球经线的夹角。此时，条件式(2.1.3)给出为

$$\frac{\dot{\varphi}}{\sin\varphi}-\dot{\psi}\cot\alpha=\Phi(\omega,\varphi,\psi,t)$$

或

$$\dot{\psi}\sin\varphi-\dot{\varphi}\tan\alpha=\Phi_1(\omega,\varphi,\psi,t) \tag{2.1.15}$$

其中

$$\Phi_1=-\Phi\sin\varphi\tan\alpha$$

而 Φ_1 为满足条件

$$\Phi_1(0,\varphi,\psi,t)=0 \tag{2.1.16}$$

的任意函数。条件式(2.1.5)给出

$$\delta\varphi=\sin\varphi\cot\alpha\delta\psi$$

方程式(2.1.6)给出

$$\{mR[\ddot{\varphi}-(\dot{\psi}+\tau)^2\sin\varphi\cos\varphi]-F_\varphi\}\cot\alpha\sin\varphi+$$

$$mR[\ddot{\psi}\sin\varphi+2\dot{\varphi}(\dot{\psi}+\tau)\cos\varphi]-F_\psi=0 \tag{2.1.17}$$

于是，式(2.1.17)、式(2.1.15)就是问题的解。函数 Φ_1 可如此选择：使得当有初始扰动时，点沿斜驶线的运动是稳定的。

2.2 正则方程的建立

Hamilton 力学的正问题是由正则方程出发来研究系统的运动性质和运动规律。本节研究的逆问题是根据给定的运动性质来组建正则方程。

2.2.1 由运动性质组建正则方程

提出下述逆问题[2]：给定力学系统的运动性质

$$\Omega:\omega_\mu(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=C_\mu\quad(\mu=1,2,\cdots,m\leqslant n) \tag{2.2.1}$$

式中:$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ 分别为广义坐标和广义动量,统称正则变量;ω_μ 彼此相容且独立,试组建力学系统运动的正则方程

$$\dot{q}_i = Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t), \quad \dot{p}_i = P_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2.2}$$

使得按性质式(2.2.1)的运动是一个可能的运动。

假设待求方程有如下形式,即

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \\ \dot{p}_i &= P_i^{\tau}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) + P_i^{\nu}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

其中

$$P_i^{\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

而 $H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ 为 Hamilton 函数,P_i^{ν} 为非势广义力。流形式(2.2.1)是为方程组(2.2.3)的积分流形的充分必要条件为

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_i}P_i^{\nu} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial t} = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$$

$$(\mu=1,2,\cdots,m; i=1,2,\cdots,n)$$

或者写成

$$(\omega_\mu,H) + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_i}P_i^{\nu} = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

其中

$$(\omega_\mu,H) = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

为函数 ω_μ 和 H 组成的 Poisson 括号,Φ_μ 为任意函数,并满足

$$\Phi_\mu|_{\omega=0} = 0$$

且 $C_\mu \neq 0$ 时有 $\Phi_\mu = 0$。

假设示点(亦称代表点)$M(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 运动仅在广义有势力 P_i^{τ} 作

用下沿积分流形式(2.2.1)发生,此时有

$$P_i^{\nu}\big|_{\omega=0}=\Phi_{\mu}\big|_{\omega=0}=0$$

于是,式(2.2.4)成为

$$(\omega_{\mu},H)+\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial t}=0 \tag{2.2.5}$$

这就是 Hamilton 系统对第一积分的 Poisson 条件。关系式(2.2.5)可写成

$$\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial q_i}Q_i+\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial p_i}P_i^{\tau}+\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial t}=0 \quad (\mu=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2.6}$$

这就是为确定 P_i^{τ} 和 Q_i 的方程。相对 $P_s^{\tau}(s=1,2,\cdots,m)$ 解代数方程式(2.2.6),得到

$$P_s^{\tau}=-\frac{\Delta_{rs}}{\Delta}\left(\frac{\partial\omega_r}{\partial q_i}Q_i+\frac{\partial\omega_r}{\partial t}\right)-\frac{\Delta^{sk}}{\Delta}P_k^{\tau}$$

$$(s,r=1,2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,n) \tag{2.2.7}$$

其中

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial\omega_r}{\partial p_s}\right)_{m\times m}$$

而 Δ_{rs} 为行列式 Δ 元素 (r,s) 的代数余子式,Δ^{sk} 为 Δ 中第 s 列用矩阵 $(\partial\omega_i/\partial p_l)_{m\times n}$ 的第 k 列替代所得的行列式。

由式(2.2.4),考虑到条件式(2.2.5),得到

$$\frac{\partial\omega_{\mu}}{\partial p_i}P_i^{\nu}=\Phi_{\mu}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \quad (\mu=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2.8}$$

当示点$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$在给定流形式(2.2.1)外运动时,由方程式(2.2.8)可确定加在系统上的非势广义力,并表示为

$$P_s^{\nu}=\frac{\Delta_{rs}}{\Delta}\Phi_r(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)-\frac{\Delta^{sk}}{\Delta}P_k^{\nu}$$

$$(s,r=1,2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,n) \qquad (2.2.9)$$

于是,使系统按给定性质式(2.2.1)的运动是一个可能运动的待求方程组有如下形式,即

$$\begin{gathered}\dot{q}_i=Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\\ \dot{p}_s=\frac{\Delta_{rs}}{\Delta}\left(\Phi_r-\frac{\partial\omega_r}{\partial q_i}Q_i-\frac{\partial\omega_r}{\partial t}\right)-\frac{\Delta^{sk}}{\Delta}(p_k^{\tau}+P_k^{\nu}) \qquad (2.2.10)\\ \dot{p}_k=P_k^{\tau}+P_k^{\nu}\end{gathered}$$

$$(s,r=1,2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,n)$$

由式(2.2.10)看出,组成的方程中包含一些未定函数 Q_i、P_k^{τ}、P_k^{ν}、Φ_r 等。这些未定函数还应满足方程式(2.2.10)为正则形式的条件。这个要求写成下述形式,即

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial P_j^{\tau}}{\partial p_i},\quad \frac{\partial P_i^{\tau}}{\partial q_j}=\frac{\partial P_j^{\tau}}{\partial q_i},\quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}=\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$(2.2.11)$$

而这正是力学系统在广义有势力作用下存在 Poincaré 积分不变量的条件[3]。

在某些动力学逆问题中,正则方程的第一组右端 $Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ 根据问题的提法是事先已知的,例如,刚体绕定点运动的逆问题中的运动学方程,问题的解归结为确定广义有势力 P_k^{τ},以控制示点沿给定的流形 Ω 而运动。此时,余下的未定函数 P_k^{ν} 和 Φ_r 可由补充需要进一步求得。

现在研究一些特殊情形[2]。

情形 1 $m=n$。

在此情形,非势力仅由函数 $\Phi_r(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)(r=1,2,\cdots,n)$ 来确定。方程式(2.2.10)成为

$$\dot{q}_i = Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},,t)$$

$$\dot{P}_i = \frac{\Delta_{ri}}{\Delta}\left(\Phi_r - \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j}Q_j - \frac{\partial \omega_r}{\partial t}\right) \quad (i,j,r=1,2,\cdots,n) \tag{2.2.12}$$

进而,如果 ω_μ 不依赖于 t,则有

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \\ \dot{P}_i &= \frac{\Delta_{ri}}{\Delta}\left(\Phi_r - \frac{\partial \omega_r}{\partial q_j}Q_j\right) \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

情形 2　运动性质给出为

$$\omega_\mu = p_\mu - f_\mu(\boldsymbol{q},t) = 0 \tag{2.2.14}$$

此时,有

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial p_s} = \begin{cases} 1 & r=s \\ 0 & r\neq s \end{cases}$$

$$\Delta = 1, \Delta_{rs} = \begin{cases} 1 & r=s \\ 0 & r\neq s \end{cases} \tag{2.2.15}$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial q_i} = -\frac{\partial f_r}{\partial q_i}, \frac{\partial \omega_r}{\partial t} = -\frac{\partial f_r}{\partial t}$$

当 $m<n$ 时,将式(2.2.15)代入式(2.2.10),得到待求方程组为

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \\ \dot{p}_s &= \frac{\partial f_s}{\partial q_i}Q_i + \frac{\partial f_s}{\partial t} + \Phi_s \\ \dot{p}_k &= P_k^\tau + P_k^\nu \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

$$(i=1,2,\cdots,n; s=1,2,\cdots,m; k=m+1,m+2,\cdots,n)$$

当 $m=n$ 时,运动方程有如下形式,即

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial f_i}{\partial q_j}Q_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} + \Phi_i \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

情形3　运动性质给出为

$$\omega_\mu(q_\mu,p_\mu)=c_\mu \quad (\mu=1,2,\cdots,m) \tag{2.2.18}$$

在此情形，当 $m<n$ 时，有

$$\Delta = \prod \frac{\partial \omega_r}{\partial p_r}, \Delta_{ss} = \prod_{r\neq s} \frac{\partial \omega_r}{\partial p_r}, \Delta_{sr} = 0 \quad (s\neq r)$$

$$\Delta^{sk}=0, \frac{\partial \omega_r}{\partial t}=0, \frac{\partial \omega_r}{\partial q_i}=\begin{cases}1 & i=r\\ 0 & i\neq r\end{cases} \tag{2.2.19}$$

$$(i,r=1,2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,n)$$

将式(2.2.19)代入式(2.2.10)，得到待求方程组为

$$\dot{q}_i=Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$$

$$\dot{p}_s=\frac{1}{\dfrac{\partial \omega_s}{\partial p_s}}\left(\Phi_s-\frac{\partial \omega_s}{\partial q_s}Q_s\right) \tag{2.2.20}$$

$$\dot{p}_k=P_k^{\tau}+P_k^{\nu}$$

$$(i=1,2,\cdots,n;s=1,2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,n)$$

当 $m=n$ 时，则有

$$\dot{q}_i=Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$$

$$\dot{p}_i=\frac{1}{\dfrac{\partial \omega_i}{\partial p_i}}\left(\Phi_i-\frac{\partial \omega_i}{\partial q_i}Q_i\right) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2.21}$$

2.2.2　算例

已知某二自由度系统有两个积分，即

$$\omega_1=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}cq_1^2=c_1 \tag{2.2.22}$$

$$\omega_2=p_2=c_2 \tag{2.2.23}$$

试建立系统的正则方程。

问题属于 $m=n=2$ 的情形，且 ω_1、ω_2 不显含 t，故可利用方程

式(2.2.13)。由 Hamilton 函数 $H=\omega_1=c_1$ 计算得

$$Q_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m},\quad Q_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{p_2}{m} \tag{2.2.24}$$

于是,正则方程的第一组为

$$\dot{q}_1=\frac{p_1}{m},\dot{q}_2=\frac{p_2}{m} \tag{2.2.25}$$

下面计算方程式(2.2.13)的第二组,有

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\\ \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{p_1}{m} & \dfrac{p_2}{m}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{p_1}{m}$$

$$\Delta_{11}=1,\Delta_{12}=0,\Delta_{21}=-\frac{p_2}{m},\Delta_{22}=\frac{p_1}{m}$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}=cq_1,\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}=\frac{\partial\omega_2}{\partial q_1}=\frac{\partial\omega_2}{\partial q_2}=0$$

于是,有

$$\dot{p}_1=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\left(\Phi_1-\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}Q_1-\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}Q_2\right)+\frac{\Delta_{21}}{\Delta}\left(\Phi_2-\frac{\partial\omega_2}{\partial q_1}Q_1-\frac{\partial\omega_2}{\partial q_2}Q_2\right)=$$

$$\frac{m}{p_1}\left(\Phi_1-cq_1\frac{p_1}{m}\right)-\frac{p_2}{p_1}\Phi_2$$

$$\dot{p}_2=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}\left(\Phi_1-\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}Q_1-\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}Q_2\right)+\frac{\Delta_{22}}{\Delta}\left(\Phi_2-\frac{\partial\omega_2}{\partial q_1}Q_1-\frac{\partial\omega_2}{\partial q_2}Q_2\right)=\Phi_2$$

因积分常数 c_1、c_2 为任意常数,故 Еругин 函数可取 $\Phi_1=\Phi_2=0$,于是有

$$\dot{p}_1=-cq_1,\quad \dot{p}_2=0 \tag{2.2.26}$$

这样,方程式(2.2.25)、式(2.2.26)即为所求正则方程。

2.3 Суслов 问题

Суслов 问题是指，构造力函数使系统有给定的特殊积分。它是构造势力场的非常普遍的问题，由 Суслов 于 1890 年给出。在给定的积分数目比系统自由度数目少一的前提下，Суслов 解决了这个问题，建立了关于力函数的微分方程并导出了方程的相容条件。稍后，Жуковский 对二自由度和三自由度力学系统建立了力函数的显式。

2.3.1 问题的提出

研究具有 n 个自由度的定常完整力学系统。在广义坐标空间中某域 G 上给定超曲面

$$\Omega_r: \omega_r(q_j)=0 \quad (r=1,2,\cdots,n-1; j=1,2,\cdots,n) \tag{2.3.1}$$

假设：(1) 函数 $\omega_r=\omega_r(q_j)$ 连续，且有连续偏导数；(2) 对于所有 $q_j\in G$，函数矩阵

$$\frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1})}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_n)} \tag{2.3.2}$$

的秩等于 $(n-1)$。所有超曲面 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ 有共同部分 Γ，它是一维流形。假设在 Γ 上满足条件

$$\Delta_j\Delta_j\neq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2.3.3}$$

其中 Δ_j 为行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\omega_{n-1}}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_{n-1}}{\partial q_n} \end{vmatrix}$$

的元素$(1,j)$的代数余子式。问题是要确定广义力Q_j，在其作用下示点沿给定积分流形式(2.3.1)的运动是系统的可能运动。

2.3.2 相对力函数的方程

具有给定积分流形式(2.3.1)的微分方程组的集合可表示为如下形式[4]，即

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{1}{\Delta_n}(\Delta_j P_n + \Phi_r \Delta_{rj}) \\ \dot{q}_n &= P_n \quad (r,j=1,2,\cdots,n-1)\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

式中：Δ_{rj}为行列式Δ_n的元素$\partial\omega_r/\partial q_j$的代数余子式；$P_n=P_n(q_j)$为在流形$\Gamma$上不为零的任意函数；$\Phi_r=\Phi_r(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q})$为任意连续函数，在给定流形$\Gamma$上变为零，即

$$\Phi_r(0,q_j)=0 \quad (r=1,2,\cdots,n-1;j=1,2,\cdots,n) \tag{2.3.5}$$

因为力学系统是定常的，动能为广义速度的齐二次型

$$T=\frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (a_{ij}=a_{ji}) \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{2.3.6}$$

将式(2.3.4)对时间t求导数，并将所得$\ddot{q}_i$以及方程式(2.3.4)、式(2.3.6)的右端部分代入Lagrange方程，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$

经过某些变换后可得到广义力的显式[4]，即

$$\begin{aligned}Q_j = {} & \frac{1}{\Delta_n}\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_j}\dot{P}_n+\frac{P_n^2}{\Delta_n}\Delta_k\Big[\frac{\partial}{\partial q_k}\Big(\frac{1}{\Delta_n}\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_j}\Big)-\frac{1}{2\Delta_n}\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j}\Delta_i\Big]+ \\ & \frac{P_n}{\Delta_n}b_l\Big[\frac{\partial}{\partial q_l}\Big(\frac{1}{\Delta_n}\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_j}\Big)+\frac{1}{\Delta_n}\Big(\frac{\partial a_{jl}}{\partial q_i}-\frac{\partial a_{li}}{\partial q_j}\Big)\Delta_i\Big]+ \\ & \frac{P_n}{\Delta_n}a_{js}\Delta_k\frac{\partial}{\partial q_k}\Big(\frac{b_s}{\Delta_n}\Big)+\frac{1}{\Delta_n}a_{js}b_r\frac{\partial}{\partial q_r}\Big(\frac{b_s}{\Delta_n}\Big)+\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Delta_n^2}b_s b_r\left(\frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_j}\right)+\frac{1}{\Delta_n}a_{js}\frac{\partial b_s}{\partial \omega_r}\Phi_r$$

$$(j,k,i=1,2,\cdots,n;l,s,r=1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.3.7)$$

其中

$$b_s=\Phi_r\Delta_{rs} \qquad (2.3.8)$$

$$2\theta=a_{ji}\Delta_j\Delta_i \qquad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_j}=a_{ji}\Delta_i \qquad (2.3.10)$$

如果示点处于给定流形上，那么函数 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_{n-1}$ 恒等于零。此时，函数

$$\omega_r(q_j)=c_r \qquad (2.3.11)$$

是方程组(2.3.4)的第一积分，而式(2.3.7)成为

$$Q_j=\frac{1}{\Delta_n}\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_j}\dot{P}_n+\frac{P_n^2}{\Delta_n}\Delta_k\left[\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{\Delta_n}\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_j}\right)-\frac{1}{2\Delta_n}\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j}\Delta_i\right]$$

$$(j,k,i=1,2,\cdots,n) \qquad (2.3.12)$$

下面建立相对力函数的偏微分方程。假设系统所受力是保守的，即存在力函数 $U(q_j)$ 使得

$$Q_j=\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

于是，可求出允许有给定第一积分式(2.3.11)的力函数 $U(q_j)$。此时，系统存在能量积分

$$T=U+h \qquad (2.3.13)$$

在动能表达式(2.3.6)中导数 $\dot{q}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 用其表达式(2.3.4)替代，由能量积分式(2.3.13)求得函数 P_n^2，有

$$P_n^2=\frac{U+h}{\theta}\Delta_n^2 \qquad (2.3.14)$$

由式(2.3.12)中消去 $\dot{P}_n$，而 P_n^2 用表达式(2.3.14)替代，便得到对

力函数 $U(q_j)$ 的一阶线性偏微分方程组[4]，即

$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\frac{\partial U}{\partial q_r}-\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\frac{\partial U}{\partial q_n}+\frac{U+h}{\theta}N_r=0\quad(r=1,2,\cdots,n-1)\tag{2.3.15}$$

其中

$$N_r=-\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\frac{\partial\theta}{\partial q_r}+\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\frac{\partial\theta}{\partial q_n}+\Delta_k L_{rk}+$$
$$2\theta\left[\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\right)-\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\right)\right]\tag{2.3.16}$$
$$(r=1,2,\cdots,n-1;k=1,2,\cdots,n)$$

$$L_{rk}=\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\left[\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\right)\right]-$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}\left[\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\right)-\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\right)-\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}\right)\right]\tag{2.3.17}$$

而对系数 L_{rk}，有

$$L_{nk}=L_{kn}=L_{kk}=0\quad(k=1,2,\cdots,n)$$
$$L_{rk}=-L_{kr}\quad(1\leqslant k,r\leqslant n)$$

如果

$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\neq0$$

则方程式(2.3.15)是线性独立的。由条件式(2.3.2)和二次型式(2.3.6)的非退化，可假设上述不等式成立。

2.3.3 方程组的相容性

方程组(2.3.15)的方程个数是 $n-1$，但仅包含一个待求函数 $U(q_j)$，因此必须研究相容性，或者说方程组的可积性。

由偏微分方程理论可知,方程

$$F_\nu(\boldsymbol{q},U,\boldsymbol{p})=0 \quad (\nu=1,2,\cdots,m) \tag{2.3.18}$$

的每个二次连续可微解,应满足方程

$$[F_k,F_r]=0 \quad (k,r=1,2,\cdots,m) \tag{2.3.19}$$

其中 $\boldsymbol{q}(q_1,q_2,\cdots,q_n)$,$\boldsymbol{p}\left(\frac{\partial U}{\partial q_1},\frac{\partial U}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial U}{\partial q_n}\right)$,$U=U(\boldsymbol{q})$,而 F_ν 为某域 $R(\boldsymbol{q},U,\boldsymbol{p})$ 上对所有$(2n+1)$个变量 $\boldsymbol{q},U,\boldsymbol{p}$ 的连续可微函数,$[F_k,F_r]$为 Jacobi 括号,表示为

$$[F_k,F_r]=\left(\frac{\partial F_k}{\partial q_i}+p_i\frac{\partial F_k}{\partial U}\right)\frac{\partial F_r}{\partial p_i}-\left(\frac{\partial F_r}{\partial q_i}+p_i\frac{\partial F_r}{\partial U}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_i}$$

$$(k,r=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n) \tag{2.3.20}$$

如果对所有 $\boldsymbol{q}$、U、$\boldsymbol{p}$,有

$$[F_k,F_r]\equiv 0 \quad (k,r=1,2,\cdots,m) \tag{2.3.21}$$

那么方程组(2.3.18)是内旋的。式(2.3.21)称为方程组(2.3.18)的可积性(相容性)条件。

对方程式(2.3.15),Jacobi 括号有如下形式,即

$$[F_r,F_s]=L_{rs}\frac{\partial U}{\partial q_n}+(U+h)\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\Delta_k L_{rs}}{\theta\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\right)\right.$$

$$+\left[\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\Delta_l L_{rl}}{\theta\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\Delta_l L_{sl}}{\theta\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\right)-\right.$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_s}\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\Delta_l L_{rl}}{\theta\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\Delta_l L_{sl}}{\theta\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\right)-$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\Delta_l L_{rs}}{\theta\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_l}\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\Delta_l L_{rs}}{\theta\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\right)\right]_{l\neq r,s}-$$

$$-\frac{L_{rs}}{\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}\frac{\partial\Delta_k}{\partial q_n}+\frac{\partial\theta}{\partial q_n}\frac{L_{rs}}{\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}}\Bigg\}+$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\left(N_r\frac{\partial h}{\partial q_s}-N_s\frac{\partial h}{\partial q_r}\right)$$

$$(r,s,l=1,2,\cdots,n-1;k=1,2,\cdots,n) \qquad (2.3.22)$$

由 Jacobi 括号式(2.3.22)的形式得知,如果对任何一对指标 $r,s=1,2,\cdots,n-1$,有

$$L_{rs}=0 \qquad (2.3.23)$$

那么,所有 Jacobi 括号恒等于零,即方程组(2.3.15)的可积性条件式(2.3.21)满足。因此,在满足条件式(2.3.23)下,方程组(2.3.15)是相容的,即对所有方程式(2.3.15)存在解。

2.3.4 方程组的积分

假设相容性条件式(2.3.23)满足,现在来求方程组(2.3.15)的通解。假设按各轨道式(2.3.11)实现的运动有不同的总能量,即 h 是 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1}$ 的函数。

首先,将非齐次方程式(2.3.15)化为齐次方程。设想待求函数 $U(\boldsymbol{q})$ 以隐式给出

$$W(\boldsymbol{q},U)=0 \qquad (2.3.24)$$

由此求得偏导数

$$\frac{\partial U}{\partial q_j}=-\frac{\partial W/\partial q_j}{\partial W/\partial U}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

将其代入方程式(2.3.15),得到

$$\frac{\partial W}{\partial q_r}-\frac{\partial\theta/\partial\Delta_r}{\partial\theta/\partial\Delta_n}\frac{\partial W}{\partial q_n}-\frac{U+h}{\theta\partial\theta/\partial\Delta_n}A_r\frac{\partial W}{\partial U}=0$$

$$(r=1,2,\cdots,n-1) \qquad (2.3.25)$$

其中

$$A_r = -\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\frac{\partial\theta}{\partial q_r} + \frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\frac{\partial\theta}{\partial q_n} + 2\theta\left[\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\right) - \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_r}\right)\right] \tag{2.3.26}$$

对应于方程组(2.3.25)的全微分方程组为

$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}\mathrm{d}q_k = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{2.3.27}$$

$$\mathrm{d}U = -\frac{U+h}{\theta\partial\theta/\partial\Delta_n}A_r\mathrm{d}q_r \quad (r = 1,2,\cdots,n-1) \tag{2.3.28}$$

方程式(2.3.27)是 n 维 Pfaff 组。根据 Frobenius 定理，为使 Pfaff 组完全可积，其充分必要条件是方程式(2.3.27)左端部分的外导数按方程本身而变为零。令

$$a_k = \frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}$$

$$\omega = a_k\mathrm{d}q_k$$

则有

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}a_k\Lambda\mathrm{d}q_k = \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}q_k\Lambda\mathrm{d}q_i$$

$$\omega\Lambda\mathrm{d}\omega = a_j\mathrm{d}q_j\Lambda\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}q_k\Lambda\mathrm{d}q_i = L_{jki}\mathrm{d}q_j\Lambda\mathrm{d}q_k\Lambda\mathrm{d}q_i$$

其中

$$L_{jki} = a_i\left(\frac{\partial a_k}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_k}\right) - a_k\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}\right) + a_j\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_i}\right)$$

如果

$$L_{jki} = 0 \quad (j,k,i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.3.29}$$

则 Frobenius 定理成立。条件式(2.3.29)还可放宽为

$$L_{rsn} = 0 \quad (r,s = 1,2,\cdots,n-1)$$

实际上，由方程

$$L_{rsn} = 0, L_{rln} = 0, L_{sln} = 0$$

得到

$$\frac{\partial a_s}{\partial q_r}-\frac{\partial a_r}{\partial q_s}=\frac{a_s}{a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_r}-\frac{\partial a_r}{\partial q_n}\right)-\frac{a_r}{a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_s}-\frac{\partial a_s}{\partial q_n}\right)$$

$$\frac{\partial a_l}{\partial q_r}-\frac{\partial a_r}{\partial q_l}=\frac{a_l}{a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_r}-\frac{\partial a_r}{\partial q_n}\right)-\frac{a_r}{a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_l}-\frac{\partial a_l}{\partial q_n}\right)$$

$$\frac{\partial a_l}{\partial q_s}-\frac{\partial a_s}{\partial q_l}=\frac{a_l}{a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_s}-\frac{\partial a_s}{\partial q_n}\right)-\frac{a_s}{a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_l}-\frac{\partial a_l}{\partial q_n}\right)$$

将其代入式(2.3.29)，便得

$$L_{jki}=0$$

对所论情形，表达式 L_{rkn} 与式(2.3.17)重合，因此，方程组(2.3.15)的相容性条件式(2.3.23)，同时又是 Pfaff 组式(2.3.27)的完全可积条件。由方程式(2.3.27)得到第一积分

$$V(q_j)=p_1 \tag{2.3.30}$$

式中：p_1 为任意常数。

下面研究方程式(2.3.28)的积分。将式(2.3.26)代入方程式(2.3.28)的右端，逐项求和并利用方程式(2.3.27)，得到

$$\mathrm{d}U=-(U+h)\left[-\mathrm{d}\ln\theta+\mathrm{d}\ln\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_n}\right)^2-\frac{2}{\partial\theta/\partial\Delta_n}\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}\right)\mathrm{d}q_k\right] \tag{2.3.31}$$

设 $\mu(q_j)$ 是 Pfaff 方程式(2.3.27)的积分因子，此时有

$$\mu\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_k}=\frac{\partial V}{\partial q_k}\quad(k=1,2,\cdots,n) \tag{2.3.32}$$

将式(2.3.32)代入方程式(2.3.31)，得到

$$\mathrm{d}U=(U+h)\,\mathrm{d}\ln(\theta\mu^2)$$

令

$$\ln(\theta\mu^2)=\tau$$

得到线性非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = U + h$$

其通解为

$$U = \theta\mu^2\left[p_2 - \int h\mathrm{d}\left(\frac{1}{\theta\mu^2}\right)\right] \tag{2.3.33}$$

式中：p_2 为任意常数。于是

$$V_1(U,\boldsymbol{q}) = \frac{U}{\theta\mu^2} + \int h\mathrm{d}\left(\frac{1}{\theta\mu^2}\right) = p_2 \tag{2.3.34}$$

方程组(2.3.15)的通解是第一积分式(2.3.30)和式(2.3.34)的任意函数

$$f(V,V_1) = 0 \tag{2.3.35}$$

先对第二个变量解方程式(2.3.35)，再对 U 求解并分部积分式(2.3.34)的右端，得到方程组(2.3.15)的通解为

$$U = \theta\mu^2\psi(V) - h + \theta\mu^2\int\frac{\mathrm{d}h}{\theta\mu^2} \tag{2.3.36}$$

式中：ψ 为任意函数。

在方程组(2.3.15)相容条件下，式(2.3.36)给出允许有第一积分式(2.3.11)的力函数的显式。

2.3.5 算例

研究单位质量质点用球坐标 r,φ,ψ 描述的运动，其中 r 为矢径长度，φ 为经度，ψ 为纬度。设曲线族由方程

$$\omega_1 = r - \psi = c_1, \omega_2 = \varphi = c_2 \tag{2.3.37}$$

来确定，试求允许有给定积分式(2.3.37)的力函数的集合。

首先，建立 Jacobi 矩阵。令 $q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = \psi$，则

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2} & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\omega_2}{\partial q_1} & \frac{\partial\omega_2}{\partial q_2} & \frac{\partial\omega_2}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其次，验证相容性条件。质点的动能表示为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\psi+r^2\dot{\psi}^2)=$$

$$\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+q_1^2\dot{q}_2^2\sin^2 q_3+q_1^2\dot{q}_3^2)$$

于是，有

$$a_{11}=1,a_{22}=q_1^2\sin^2 q_3,a_{33}=q_1^2,a_{12}=a_{23}=a_{31}=0$$

又

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\\ \dfrac{\partial\omega_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial q_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

于是，有

$$\Delta_1=1,\Delta_2=0,\Delta_3=1$$

又

$$2\theta=a_{11}\Delta_1^2+a_{22}\Delta_2^2+a_{33}\Delta_3^2=1+r^2$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_1}=1,\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_2}=0,\frac{\partial\theta}{\partial\Delta_3}=r^2$$

利用式(2.3.17)，可计算出

$$L_{jk}=0\quad(j,k=1,2,3)\tag{2.3.38}$$

于是，相容性条件成立。

最后，求力函数的表达式。Pfaff 方程式(2.3.27)给出

$$\mathrm{d}q_1+r^2\mathrm{d}q_3=0$$

即

$$\mathrm{d}r+r^2\mathrm{d}\psi=0$$

将其乘以积分因子

$$\mu = -\frac{1}{r^2}$$

并积分，得

$$V = \frac{1}{r} - \psi = p_1$$

通解式(2.3.36)给出为

$$U = \theta\mu^2\psi(V) - h + \theta\mu^2\int\frac{\mathrm{d}h}{\theta\mu^2} =$$

$$\frac{1+r^2}{2r^4}\psi\left(\frac{1}{r} - \psi\right) - h + \frac{1+r^2}{r^4}\int\frac{r^4}{1+r^2}\mathrm{d}h \qquad (2.3.39)$$

2.4 按给定的一个积分确定广义力

在 Whittaker 的经典著作中，提到 Bertrand 于 1852 年得到的一个定理：已知系统的一个第一积分，便可确定作用在系统上的力，假设力仅依赖于坐标，而不依赖于速度。这是有关动力系统积分的一个重要性质，也是一个重要的动力学逆问题。Whittaker 指出："但是，这个积分不能随意选取，而必须满足某些条件"[5]。本节研究 Bertrand 定理及其推广。

2.4.1 Bertrand 定理

研究完整力学系统，其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定。假设系统动能已知，并表示为一般形式

$$T = \frac{1}{2}A_{sk}(\boldsymbol{q},t)\dot{q}_s\dot{q}_k + B_s(\boldsymbol{q},t)\dot{q}_s + T_0(\boldsymbol{q},t) \quad (s,k=1,2,\cdots,n)$$

系统的运动微分方程有如下形式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (2.4.1)$$

其展开式为

$$A_{sk}\ddot{q}_k = -[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k - \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k + Q_s$$

$$(s,k,r = 1,2,\cdots,n)$$

其中

$$[k,r;s] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_r} + \frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k} - \frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s}\right)$$

为动能系数 A_{ks} 的第一类 Christoffel 记号。于是，可解出所有广义加速度

$$\ddot{q}_l = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + Q_s - \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}$$

$$(l,s,k,r = 1,2,\cdots,n) \tag{2.4.2}$$

假设系统有一个第一积分

$$\omega = \omega(q,\dot{q},t) = 常数 \tag{2.4.3}$$

将其对时间 t 求导数，得到

$$\frac{\partial \omega}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad (l,k = 1,2,\cdots,n)$$

将式(2.4.2)代入上式，消去 $\ddot{q}_l$，得到

$$\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_l}Q_s + \frac{\partial \omega}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\} = 0$$

$$(l,s,k,r = 1,2,\cdots,n) \tag{2.4.4}$$

将此式简写成

$$a_s(q,\dot{q},t)Q_s + b(q,\dot{q},t) = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{2.4.5}$$

其中

$$a_s = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_l}$$

$$b = \frac{\partial \omega}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_l} \frac{\Delta_{sl}}{\Delta} \left\{ -[k,r;s] \dot{q}_k \dot{q}_r + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t} \dot{q}_k \right\} \quad (s,l,k=1,2,\cdots,n)$$

现在假设广义力 $Q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 不依赖于 $\dot{\boldsymbol{q}}$。关系式(2.4.5)对出现于其中任意独立的量,应是一个恒等式。因此,它对任意一个 $\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数应等于零。于是,得到

$$\frac{\partial a_s}{\partial \dot{q}_k} Q_s + \frac{\partial b}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k,s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.6}$$

解方程组(2.4.6),便有可能求出广义力 Q_s。于是有以下命题。

命题 1 若已知完整系统式(2.4.1)的结构,但不知道广义力 Q_s。假设 Q_s 不依赖于广义速度。当已知第一积分式(2.4.3)时,系统的广义力由式(2.4.6)来确定。

命题 1 称为 Bertrand 定理。根据这个定理,只要给出一个第一积分,在确定的条件下就足以求得广义力。

2.4.2 Bertrand 定理的一个推广

命题 1 中已知的积分是第一积分,即式(2.4.3)中的常数是任意常数。下面将 Bertrand 定理推广到积分为特殊积分的情形。

假设方程组(2.4.1)有一个特殊积分

$$\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = a \tag{2.4.7}$$

式中:a 为某固定常数。将式(2.4.7)对 t 求导数并引进 Еругин 函数 Φ,则有

$$\frac{\partial \omega}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial \omega}{\partial t} = \Phi(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \quad (l,k=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.8}$$

其中 Еругин 函数 Φ 除去集合

$$\Omega\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t\,|\,\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=a\}$$

之外处处任意，而在 Ω 上变为零。类似于式(2.4.5)，此时有

$$a_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)Q_s+b(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)-\Phi(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.9}$$

假设广义力 Q_s 不依赖于 $\dot{q}$。关系式(2.4.9)对出现于其中任意独立的量，应是一个恒等式。因此，它对任意一个 $\dot{q}_k$ 的偏导数应等于零。于是，得到

$$\frac{\partial a_s}{\partial \dot{q}_k}Q_s+\frac{\partial b}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}=0 \quad (k,s=1,2,\cdots,n) \tag{2.4.10}$$

解代数方程组(2.4.10)，便有可能确定广义力 Q_s。于是有以下命题。

命题 2 若已知完整系统式(2.4.1)的结构，但不知道广义力 Q_s。假设广义力不依赖于广义速度。当已知积分为特殊积分式(2.4.7)时，广义力 Q_s 由方程式(2.4.10)确定。

上述命题 2 已由参考文献[2]给出，它是 Bertrand 定理的一个推广。

2.4.3 算例

已知三自由度完整系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) \tag{2.4.11}$$

系统有一个第一积分

$$\omega=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+q_1q_2 \tag{2.4.12}$$

试用 Bertrand 定理求广义力 Q_1、Q_2、Q_3。

由式(2.4.11)可知

$$\Delta=1,\Delta_{11}=\Delta_{22}=\Delta_{33}=1,\Delta_{12}=\Delta_{23}=\Delta_{31}=0$$

因此，有

$$a_1=\frac{\Delta_{1l}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_1}=\dot{q}_1$$

$$a_2=\dot{q}_2,a_3=\dot{q}_3$$

$$b=q_2\dot{q}_1+q_1\dot{q}_2$$

式(2.4.5)给出

$$\dot{q}_1Q_1+\dot{q}_2Q_2+\dot{q}_3Q_3+q_2\dot{q}_1+q_1\dot{q}_2=0 \qquad (2.4.13)$$

式(2.4.6)给出

$$Q_1+q_2=0,Q_2+q_1=0,Q_3=0$$

于是，有

$$Q_1=-q_2,Q_2=-q_1,Q_3=0 \qquad (2.4.14)$$

2.5 Noether 对称性与动力学逆问题

1918 年德国数学家 Noether 发表著名论文 *Invariante Variationsprobleme*[6]（不变变分问题）。文中所提出的理论称为 Noether 对称性理论。20 世纪 70 年代以来，Vujanović、Djukić、Bahar 等研究了非保守系统的 Noether 对称性[7,8]。李子平、刘端、赵跃宇等研究了非完整系统的 Noether 对称性[9-11]。参考文献[12,13]研究了 Birkhoff 系统的 Noether 理论。Noether 对称性是一类作用量在无限小变换下的一种不变性。如果作用量是 Hamilton 的，可研究完整和非完整系统的 Noether 对称性；如果作用量是 Pfaff 的，则可研究 Birkhoff 系统的 Noether 对称性。

本节研究完整力学系统的 Noether 对称性以及与其相关的动力学逆问题，包括 Noether 定理与 Killing 方程、Noether 逆定理，以及动力学逆问题的提法和解法等。

2.5.1 Noether 定理与 Killing 方程

引进时间和坐标的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.5.1}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{2.5.2}$$

式中:ε 为无限小参数;ξ_0、ξ_s 为无限小生成元。积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t \tag{2.5.3}$$

称为 Hamilton 作用量。Hamilton 作用量的非等时变分的基本公式为[1]

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left\{L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s\right\}\mathrm{d}t$$
$$(s = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.5.4}$$

或

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2}\varepsilon\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\bar{\xi}_s\right\}\mathrm{d}t \tag{2.5.5}$$

其中

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{2.5.6}$$

如果对无限小变换始终成立

$$\Delta S = 0 \tag{2.5.7}$$

则称无限小变换为 Noether 意义下的对称变换。此时,Noether 等式成立

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\mathrm{d}q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{2.5.8}$$

如果成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G_N)\mathrm{d}t \tag{2.5.9}$$

其中 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，则称变换式(2.5.1)为Noether意义下的准对称变换。此时，Noether 等式成立

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{2.5.10}$$

如果成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G_N) + Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t \tag{2.5.11}$$

式中：$Q_s\delta q_s$ 为系统非势力的虚功之和，则称变换式(2.5.1)为Noether 意义下的广义准对称变换。此时，Noether 等式成立

$$\begin{aligned} &L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \\ &Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

展开 Noether 等式(2.5.8)，分开含 $\ddot{q}_k$ 和不含 $\ddot{q}_k$ 的项，令其为零，得到 Killing 方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = 0$$

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{2.5.13}$$

类似地，由式(2.5.10)、式(2.5.12)得到广义 Killing 方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=-\frac{\partial G_N}{\partial t}-\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}=-\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k}\quad (k,s=1,2,\cdots,n)$$

$$(2.5.14)$$

以及

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\frac{\partial G_N}{\partial t}-\frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}=-\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k}\quad (k,s=1,2,\cdots,n)$$

$$(2.5.15)$$

利用 Noether 等式或 Killing 方程可以找到 Noether 对称变换、准对称变换，以及广义准对称变换的生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N。

如果一个有 n 个自由度的完整力学系统的运动微分方程有如下形式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0\quad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (2.5.16)$$

则系统称为 Lagrange 系统。完整保守系统，广义力有广义势的系统、Lagrange 力学逆问题系统等都是 Lagrange 系统[1]。

一般完整力学系统的运动方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s\quad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (2.5.17)$$

完整力学系统的 Noether 定理可表为如下六个命题。

命题 1 如果无限小变换式(2.5.2)是 Lagrange 系统式(2.5.16)的对称变换,则系统存在 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s = \text{常数} \tag{2.5.18}$$

命题 2 如果无限小变换式(2.5.2)是 Lagrange 系统式(2.5.16)的准对称变换,则系统存在 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s + G_N = \text{常数} \tag{2.5.19}$$

命题 3 如果无限小变换式(2.5.2)是一般完整系统式(2.5.17)的广义准对称变换,则系统存在 Noether 守恒量式(2.5.19)。

命题 4 如果无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 满足 Killing 方程式(2.5.13),则 Lagrange 系统式(2.5.16)存在 Noether 守恒量式(2.5.18)。

命题 5 如果无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N 满足广义 Killing 方程式(2.5.14),则 Lagrange 系统式(2.5.16)存在 Noether 守恒量式(2.5.19)。

命题 6 如果无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N 满足广义 Killing 方程式(2.5.15),则一般完整系统式(2.5.16)存在 Noether 守恒量式(2.5.19)。

利用命题 1、2 或命题 4、5,在已知 Lagrange 函数 L 下,可求得 Noether 对称性的生成元 ξ_0、ξ_s 以及规范函数 G_N,进而求得系统的 Noether 守恒量。利用命题 3 或命题 6,在已知 Lagrange 函数 L 和广义力 Q_s 下,可求得一般完整系统 Noether 对称性的生成元 ξ_0、ξ_s 以及规范函数 G_N,进而求得 Noether 守恒量。

2.5.2 Noether 逆定理

上面的命题 1 ~ 命题 6 是 Noether 定理的表述,它们是指由

Noether 对称性来求得 Noether 守恒量。守恒量是第一积分,也叫运动常数。Noether 逆定理是指由积分来求得 Noether 对称性。

对于 Lagrange 系统,如果已知系统的第一积分,便可由 Noether 逆定理找到相应的对称变换或准对称变换。有如下结果[1]。

命题 7 如果已知 Lagrange 系统的 r 个线性独立的第一积分

$$I^{\alpha}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=C_{\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,r)\tag{2.5.20}$$

那么,由式(2.5.2)以及

$$\bar{\xi}_s^{\alpha}=\tilde{h}_{sk}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_k}\tag{2.5.21}$$

$$\xi_0^{\alpha}=\frac{1}{L}\left(I^{\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}\right)\tag{2.5.22}$$

确定的唯一无限小变换是系统的对称变换,这里

$$\tilde{h}_{sk}h_{kr}=\delta_{sr},h_{sk}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\tag{2.5.23}$$

命题 8 如果已知 Lagrange 系统的 r 个线性独立的第一积分式(2.5.20),那么由式(2.5.2)、式(2.5.21)以及

$$\xi_0^{\alpha}=\frac{1}{L}\left(I^{\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}-G_N^{\alpha}\right)\tag{2.5.24}$$

确定的无限小变换是系统的准对称变换。

对一般完整系统,有以下命题。

命题 9 如果已知一般完整系统式(2.5.17)的 r 个线性独立的第一积分式(2.5.20),那么系统存在由式(2.5.2)、式(2.5.21)、式(2.5.24)确定的无限小变换是系统的广义准对称变换。

2.5.3 与 Noether 对称性相关的逆问题

对于 Lagrange 系统提出如下逆问题:根据形如

$$\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=C \tag{2.5.25}$$

的给定运动性质以及 Killing 方程来构造 Lagrange 函数以及无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N。

对于一般完整系统提出如下逆问题：根据给定运动性质式(2.5.25)以及 Killing 方程来构造系统的 Lagrange 函数和广义力以及无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N。

为解上述逆问题，首先取积分式(2.5.25)为 Noether 守恒量，即

$$L\xi_0+\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_s}\xi_s+G_N=\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{2.5.26}$$

然后按式(2.5.21)、式(2.5.24)建立生成元 ξ_0、ξ_s 与 Lagrange 函数 L 以及规范函数 G_N 之间的关系式。最后，利用 Noether 等式或 Killing 方程组成关于 Lagrange 函数 L 的偏微分方程组。容易看出，逆问题的解是一个解集。

2.5.4 算例

例 1　单自由度 Lagrange 系统有一个第一积分

$$\omega=-\frac{t^2}{2}\left(\frac{t}{3}q^6+q\,\dot{q}+t\,\dot{q}^2\right)=\text{常数} \tag{2.5.27}$$

试确定系统的 Lagrange 函数 L 以及无限小变换的生成元 ξ_0、ξ 和规范函数 G_N。

假设待求 Lagrange 函数有如下形式，即

$$L=\varphi(t)\,\dot{q}^2+U(t,q) \tag{2.5.28}$$

并设无限小生成元有如下形式，即

$$\xi_0=\xi_0(t,q),\ \xi=\xi(t,q)$$

Killing 方程式(2.5.13)给出

$$\left(\dot{\varphi}\dot{q}^2+\frac{\partial U}{\partial t}\right)\xi_0+\frac{\partial U}{\partial q}\xi+(U-\varphi\,\dot{q}^2)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q}\dot{q}\right)+$$

$$2\varphi\dot{q}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial q}\dot{q}\right)=0 \tag{2.5.29}$$

由式(2.5.29)中 $\dot{q}$ 的各阶系数为零,得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial U}{\partial q}\xi+U\frac{\partial\xi_0}{\partial t}=0\\&U\frac{\partial\xi_0}{\partial q}+2\varphi\frac{\partial\xi}{\partial t}=0\\&\dot{\varphi}\xi_0-\varphi\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+2\varphi\frac{\partial\xi}{\partial q}=0\\&\varphi\frac{\partial\xi_0}{\partial q}=0\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

由第二个、第四个方程得知

$$\xi_0=\xi_0(t),\xi=\xi(q) \tag{2.5.31}$$

式(2.5.26)给出

$$(\varphi\dot{q}^2+U)\xi_0+2\varphi\dot{q}(\xi-\dot{q}\xi_0)+G_N=-\frac{t^2}{2}\left(\frac{t}{3}q^6+q\dot{q}+t\dot{q}^2\right) \tag{2.5.32}$$

取

$$G_N=0 \tag{2.5.33}$$

则有

$$(\varphi\dot{q}^2+U)\xi_0+2\varphi\dot{q}(\xi-\dot{q}\xi_0)=-\frac{t^2}{2}\left(\frac{t}{3}q^6+q\dot{q}+t\dot{q}^2\right)$$

比较 $\dot{q}$ 同次幂系数,得到

$$\begin{aligned}&U\xi_0+\frac{t^3}{6}q^6=0\\&2\varphi\xi+\frac{t^2}{2}q=0\\&\varphi\xi_0-\frac{t^3}{2}=0\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

方程式(2.5.30)、式(2.5.34)有如下解,即

$$\xi_0 = t, \xi = -\frac{1}{2}q, \varphi = \frac{1}{2}t^2, U = -\frac{1}{6}t^2q^6 \tag{2.5.35}$$

于是,得到一个可能的 Lagrange 函数

$$L = \frac{t^2}{2}\left(\dot{q}^2 - \frac{1}{3}q^6\right) \tag{2.5.36}$$

与此系统相应的方程就是 Emden 方程。

例 2　已知二自由度非保守系统的一个积分

$$\omega = \dot{q}_2 - q_1 = 常数 \tag{2.5.37}$$

试利用 Noether 对称性求系统的 Lagrange 函数 L,广义力 Q_1、Q_2 以及无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_1、ξ_2 和规范函数 G_N。

式(2.5.21)给出

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \tilde{h}_{11}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_1} + \tilde{h}_{12}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_2} = \tilde{h}_{12} \\ \bar{\xi}_2 &= \tilde{h}_{21}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_1} + \tilde{h}_{22}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_2} = \tilde{h}_{22} \end{aligned} \tag{2.5.38}$$

式(2.5.26)给出

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\bar{\xi}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\bar{\xi}_2 + G_N = \dot{q}_2 - q_1 \tag{2.5.39}$$

取

$$\tilde{h}_{12} = 0, \tilde{h}_{22} = 1 \tag{2.5.40}$$

则有

$$\bar{\xi}_1 = 0, \bar{\xi}_2 = 1$$

不妨取

$$\xi_0 = \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \tag{2.5.41}$$

将其代入式(2.5.39),得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}+G_N=q_2-q_1$$

取

$$G_N=-q_1 \tag{2.5.42}$$

则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\dot{q}_2$$

积分得

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+f(q_1,q_2,\dot{q}_1) \tag{2.5.43}$$

Killing 方程式(2.5.15)给出

$$\frac{\partial L}{\partial q_2}+Q_2=\dot{q}_1$$

考虑到式(2.5.43),有

$$\frac{\partial f}{\partial q_2}+Q_2=\dot{q}_1$$

取

$$Q_2=\dot{q}_1 \tag{2.5.44}$$

则

$$f=f(q_1,\dot{q}_1)$$

于是,Lagrange 函数的集合为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+f(q_1,\dot{q}_1) \tag{2.5.45}$$

由式(2.5.45)、式(2.5.44)给出的运动微分方程为

$$\begin{gathered}\ddot{q}_2=\dot{q}_1\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial f}{\partial q_1}=Q_1\end{gathered} \tag{2.5.46}$$

为最终求得 f 和 Q_1 尚需补充另一个积分。设这个积分为

$$\omega = \dot{q}_1 \exp t - q_1 \exp t = \text{常数} \tag{2.5.47}$$

将式(2.5.47)对 t 求导数,得到

$$\ddot{q}_1 - q_1 = 0 \tag{2.5.48}$$

将式(2.5.48)与式(2.5.46)第二个方程对比,可求得

$$f = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}q_1^2, Q_1 = 0 \tag{2.5.49}$$

这样,可取

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2, Q_1 = 0, Q_2 = \dot{q}_1 \tag{2.5.50}$$

与此系统相应的方程就是著名的 Whittaker 方程。

例 3　已知二自由度完整系统的一个积分

$$\omega = \dot{q}_2 - bt\,\dot{q}_1 + bq_1 = \text{常数} \tag{2.5.51}$$

其中 b 为常数,试用 Noether 对称性确定系统的 Lagrange 函数 L,广义力 Q_1、Q_2 以及无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_1、ξ_2 和规范函数 G_N。

式(2.5.21)给出

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \tilde{h}_{11}(-bt) + \tilde{h}_{12} \\ \bar{\xi}_2 &= \tilde{h}_{21}(-bt) + \tilde{h}_{22} \end{aligned} \tag{2.5.52}$$

取

$$\tilde{h}_{11} = \tilde{h}_{22} = 1, \quad \tilde{h}_{12} = \tilde{h}_{21} = 0$$

不妨取

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = -bt, \quad \xi_2 = 1 \tag{2.5.53}$$

式(2.5.26)给出

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(-bt) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} + G_N = \dot{q}_2 - bt\,\dot{q}_1 + bq_1 \tag{2.5.54}$$

它有解

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),\quad G_N=bq_1 \tag{2.5.55}$$

Killing 方程式(2.5.15)给出

$$Q_1(-bt)+Q_2=0 \tag{2.5.56}$$

这样,式(2.5.53)、式(2.5.55)、式(2.5.56)就是逆问题的一种解。

为最终求得广义力 Q_1 和 Q_2,尚需补充一个积分,例如

$$\omega=\dot{q}_1+bt\,\dot{q}_2-bq_2+t=\text{常数} \tag{2.5.57}$$

对其求导数,得到

$$\ddot{q}_1+bt\ddot{q}_2+1=0$$

即

$$Q_1+b^2t^2Q_2+1=0 \tag{2.5.58}$$

由式(2.5.56)、式(2.5.58),最终得到

$$Q_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\quad Q_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2} \tag{2.5.59}$$

2.6 Hamilton - Jacobi 方法与动力学逆问题

正则变换是一种积分方法。正则变换,特别是 Jacobi 定理中建立的第一积分,可用于解动力学逆问题。

2.6.1 正则方程与 Hamilton - Jacobi 方法

Hamilton 正则方程有如下形式,即

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.6.1}$$

式中:$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ 为正则变量,分别为广义坐标和广义动量;$H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$为 Hamilton 函数。正则方程式(2.6.1)的求解归结为求解 Hamilton－Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,\boldsymbol{q},\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}\right)=0 \tag{2.6.2}$$

的完全积分。与此相关的动力学正问题是指,由给定的 Hamilton 函数 H,通过求方程式(2.6.2)的完全积分来求运动规律。

2.6.2 Hamilton 函数的确定

提出如下逆问题:给定力学系统的运动性质

$$\omega_\mu(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=C_\mu \quad (\mu=1,2,\cdots,m;m\leqslant n) \tag{2.6.3}$$

其中 ω_μ 在 $t\geqslant t_0$ 的某域 $G\{\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\}$ 中有界、连续、可微,使得成立内旋条件

$$(\omega_\mu,\omega_\nu)=0 \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,m) \tag{2.6.4}$$

这里(,)为 Poisson 括号,而

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_s}\right)_{m\times n}=m \tag{2.6.5}$$

要求组建正则方程式(2.6.1),使得按给定性质式(2.6.3)的运动是系统的一个可能的运动[2]。

所提问题归结为按给定的运动性质式(2.6.3)来寻求系统的 Hamilton 函数。

研究 $m=n$ 的情形。由假设式(2.6.5),可由式(2.6.3)解出全部广义动量 $p_s(s=1,2,\cdots,n)$,记作

$$p_s=\psi_s(\boldsymbol{q},t,\boldsymbol{C}) \tag{2.6.6}$$

此时,有[5]

$$(p_s-\psi_s,p_k-\psi_k)=0 \quad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{2.6.7}$$

因此

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial q_k}=\frac{\partial \psi_k}{\partial q_s} \quad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{2.6.8}$$

构造某函数 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t,\boldsymbol{C})$，它满足偏微分方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_s}=\psi_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.6.9}$$

考虑到条件式(2.6.8)，则方程式(2.6.9)的解可表示为

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{q_k^0}^{q_k} \psi_k(q_1^0,\cdots,q_{k-1}^0,q_k,\cdots,q_n,t,\boldsymbol{C})\,\mathrm{d}q_k - f(t,\boldsymbol{C})$$

$$(k=1,2,\cdots,n) \tag{2.6.10}$$

式中：$f(t,\boldsymbol{C})$ 为任意连续、可微函数；$q_k^0\,(k=1,2,\cdots,n)$ 为任意固定常数。由式(2.6.5)、式(2.6.6)得

$$\det\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_k \partial C_r}\right)_{n\times n}=\det\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial C_r}\right)_{n\times n} \neq 0 \tag{2.6.11}$$

由式(2.6.10)，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=-W_k(q_k,\cdots,q_n,t,\boldsymbol{C})-W_0(t,\boldsymbol{C}) \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\tag{2.6.12}$$

其中

$$W_k(q_k,\cdots,q_n,t,C)=-\int_{q_k^0}^{q_k} \frac{\partial \psi_k(q_1^0,\cdots,q_{k-1}^0,q_k,\cdots,q_n,t,\boldsymbol{C})}{\partial t}\mathrm{d}q_k$$

$$\tag{2.6.13}$$

$$W_0(t,\boldsymbol{C})=\frac{\partial f(t,\boldsymbol{C})}{\partial t} \tag{2.6.14}$$

等式(2.6.12)右端中的 $\boldsymbol{C}$ 用 $\omega\left(\boldsymbol{q},t,\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)$ 替代，并将所有项移至左端，得到对 $\boldsymbol{\Phi}$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}+W_k\left(q_k,\cdots,q_n,t,\boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{q},t,\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)\right)+$$

$$W_0\left(t,\boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{q},t,\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{q}}\right)\right)=0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

(2.6.15)

所得方程式(2.6.15)可作为 Hamilton - Jacobi 方程来研究。根据其构造方法,函数 Φ 乃是这个方程的完全积分。据 Jacobi 定理,由式(2.6.6)、式(2.6.9)可知,正则方程式(2.6.1)的带函数

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \frac{\partial f(t,\boldsymbol{C})}{\partial t}\bigg|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)} - \int_{q_k^0}^{q_k} \frac{\partial \psi_k(q_1^0,\cdots,q_{k-1}^0,q_k,\cdots,q_n,t,\boldsymbol{C})}{\partial t}\mathrm{d}q_k \bigg|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}$$

$$(k=1,2,\cdots,n) \tag{2.6.16}$$

的解满足关系式(2.6.3)。于是,求得的函数式(2.6.16)就是待求的 Hamilton 函数。

对于 $1 \leqslant m < n$ 的情形,可对等式(2.6.3)补充一些任意关系

$$\omega_{m+1}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=C_{m+1},\cdots,\omega_n(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=C_n \tag{2.6.17}$$

以使满足条件式(2.6.4)、式(2.6.5)。因此,可变为 $m=n$ 的情形。

2.6.3 算例

研究杆沿光滑平面的运动,平面以角速度 ω 绕平面内的水平轴转动。杆的运动性质为[2]

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1=p_1=C_1\\ \omega_2=\exp(\omega t)\left[p_2-\omega q_2-\dfrac{g}{2\omega}(\sin\omega t-\cos\omega t)\right]=C_2\\ \omega_3=\left(\dfrac{p_3^2}{k^2}-k^2\omega^2\sin^2 q_3\right)^{1/2}=C_3\end{cases}$$

(2.6.18)

式中:q_1、q_2 为杆子质心的坐标;轴 Oq_1 和 Oq_2 与水平面固联,且轴 Oq_1 在动的水平轴上,而轴 Oq_2 在水平面下并与之成角 ωt;q_3 为杆

子与轴 Oq_1 的夹角；Mk^2 为杆子对过质心垂直于杆的惯性矩；p_1、p_2、p_3 为对应于坐标 q_1、q_2、q_3 的广义动量；g 为重力加速度。求杆子按已知性质而运动的 Hamilton 函数 H。

系统的运动性质式(2.6.18)作为杆子运动方程的第一积分来研究，且满足条件式(2.6.4)。由积分式(2.6.18)解出 p_1、p_2、p_3，得

$$p_1 = \psi_1 = C_1$$

$$p_2 = \psi_2 = C_2\exp(-\omega t) + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t) \qquad (2.6.19)$$

$$p_3 = \psi_3 = k(C_3^2 + k^2\omega^2\sin^2 q_3)^{1/2}$$

方程式(2.6.9)给出

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} = C_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} = C_2\exp(-\omega t) + \omega q_2 + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t) \qquad (2.6.20)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} = k(C_3^2 + k^2\omega^2\sin^2 q_3)^{1/2}$$

方程式(2.6.20)的解写成

$$\Phi = C_1 q_1 + \frac{1}{2}\omega^2 q_2^2 + q_2\left[C_2\exp(-\omega t) + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t)\right] +$$

$$k\int_{q_3^0}^{q_3}(C_3^2 + k^2\omega^2\sin^2 q_3)^{1/2}\mathrm{d}q_3 - f(t, C_1, C_2, C_3) \qquad (2.6.21)$$

由此得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = q_2\left[-C_2\omega\exp(-\omega t) + \frac{g}{2}(\cos\omega t + \sin\omega t)\right] - \frac{\partial f(t, C_1, C_2, C_3)}{\partial t} \qquad (2.6.22)$$

式(2.6.16)给出

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{C_\mu = \omega_\mu} =$$

$$\left.\frac{\partial f(t,C_1,C_2,C_3)}{\partial t}\right|_{C_\mu=\omega_\mu}+$$

$$q_2\left[\omega p_2-\omega^2 q_2-\frac{g}{2}(\sin\omega t-\cos\omega t)-\frac{g}{2}(\cos\omega t+\sin\omega t)\right]$$

即

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=\left.\frac{\partial f(t,C_1,C_2,C_3)}{\partial t}\right|_{C_\mu=\omega_\mu}-\omega^2 q_2^2+\omega p_2 q_2-gq_2\sin\omega t \tag{2.6.23}$$

特别地,如果

$$\frac{\partial f(t,C_1,C_2,C_3)}{\partial t}=\frac{1}{2}\left\{C_1^2+C_3^2+\left[C_2\exp(-\omega t)+\frac{g}{2\omega}(\sin\omega t-\cos\omega t)\right]^2\right\} \tag{2.6.24}$$

那么,式(2.6.23)成为

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2+\frac{p_3^2}{k^2}\right)-\frac{1}{2}\omega^2 q_2^2-\frac{1}{2}k^2\omega^2\sin^2\omega t-gq_2\sin\omega t \tag{2.6.25}$$

2.7 Poisson 方法与动力学逆问题

Poisson 方法是积分 Hamilton 正则方程的一种有效方法,包括对第一积分的 Poisson 条件,不处于相互内旋的两个积分的 Poisson 括号也是积分的 Poisson 定理等。本节研究 Poisson 方法以及与其相关的动力学逆问题。

2.7.1 Poisson 方法

完整保守系统的正则方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{2.7.1}$$

而非保守系统的正则方程有如下形式，即

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \widetilde{Q}_s(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \tag{2.7.2}$$

其中 $\widetilde{Q}_s$ 为正则变量表示的非势广义力

$$\widetilde{Q}_s(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \widetilde{Q}_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), t) \tag{2.7.3}$$

引进两个函数 F_1, F_2 的 Poisson 括号

$$(F_1, F_2) = \frac{\partial F_1}{\partial q_s}\frac{\partial F_2}{\partial p_s} - \frac{\partial F_1}{\partial p_s}\frac{\partial F_2}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.7.4}$$

对方程式(2.7.1)，$I = I(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ 是第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (I, H) = 0 \tag{2.7.5}$$

对方程式(2.7.2)，$I = I(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ 是第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (I, H) + \frac{\partial I}{\partial p_s}\widetilde{Q}_s = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.7.6}$$

式(2.7.5)、式(2.7.6)称为 Poisson 条件。

与 Poisson 条件式(2.7.5)相关的正问题是指，在已知系统的 Hamilton 函数 H 下，用式(2.7.5)来判断或确定积分 I。与 Poisson 条件式(2.7.6)相关的正问题是指，在已知系统的 Hamilton 函数 H、广义力 $\widetilde{Q}_s$ 下，用式(2.7.6)来判断或求得积分 I。

2.7.2 与 Poisson 方法相关的动力学逆问题

利用正则方程第一积分的 Poisson 条件式(2.7.5)、式(2.7.6)，可解一些动力学逆问题。例如，根据运动方程的给定积分来构造 Hamilton 函数 H 的集合，以及根据力学系统在势力场中运动的给定性质来确定力函数的可能结构[2]。

与 Poisson 方法相关的逆问题提法如下：已知独立积分的总合

$$\omega_\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = C_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots, m \leqslant n) \tag{2.7.7}$$

根据 Poisson 条件式(2.7.5)来求得 Hamilton 函数 H。

为解上述逆问题，令 $I_\mu=\omega_\mu$，Poisson 条件式(2.7.5)成为

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}+(\omega_\mu,H)=0\quad(\mu=1,2,\cdots,m\leqslant n)\tag{2.7.8}$$

解偏微分方程组(2.7.8)就可确定待求的 Hamilton 函数 H。由方程式(2.7.8)来求 Hamilton 函数 H，一般说没有单一解。因此，常常通过施加一些补充条件来求解，或者仅求方程的特解。

与 Poisson 方法相关的逆问题还有如下提法：按给定运动性质式(2.7.7)来构造势力场。

为解上述逆问题，将系统的 Hamilton 函数 H 表示为如下形式，即

$$H=T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})-U(\boldsymbol{q})\tag{2.7.9}$$

式中：T 为系统的动能；$U(\boldsymbol{q})$ 为待求力函数。此时，Poisson 条件式(2.7.8)成为

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}+(\omega_\mu,T)-(\omega_\mu,U)=0\quad(\mu=1,2,\cdots,m\leqslant n)\tag{2.7.10}$$

由此可求得力函数 U。

对一般完整系统，与 Poisson 条件相关的动力学逆问题有如下提法：根据已知运动性质式(2.7.7)来确定系统的 Hamilton 函数 H 和非势广义力 $\widetilde{Q}_s$。

为解上述逆问题，令 $I_\mu=\omega_\mu$，Poisson 条件式(2.7.6)给出

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}+(\omega_\mu,H)+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial p_s}\widetilde{Q}_s=0\quad(\mu=1,2,\cdots,m\leqslant n;s=1,2,\cdots,n)\tag{2.7.11}$$

由此有可能求得 H 和 $\widetilde{Q}_s$。这类逆问题也没有单一解。

对完整保守系统和一般完整非保守系统，与 Poisson 条件相关

的动力学逆问题的解都归结为求解偏微分方程或求解偏微分方程组。

2.7.3 算例

例1 已知单自由度 Lagrange 系统有积分

$$\omega=\frac{1}{6}t^3q^6+\frac{1}{2}qp+\frac{1}{2t}p^2=\text{常数} \tag{2.7.12}$$

试求系统的 Hamilton 函数 H。

在此情形,方程式(2.7.8)给出

$$\frac{1}{2}t^2q^6-\frac{1}{2t^2}p^2+\left(t^3q^5+\frac{1}{2}p\right)\frac{\partial H}{\partial p}-\left(\frac{1}{2}q+\frac{1}{t}p\right)\frac{\partial H}{\partial q}=0 \tag{2.7.13}$$

如果要求

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{t^2} \tag{2.7.14}$$

并设

$$\frac{1}{2}q+\frac{1}{t}p\neq 0 \tag{2.7.15}$$

将式(2.7.14)代入式(2.7.13)并注意到式(2.7.15),得到

$$\frac{\partial H}{\partial q}=t^2q^5 \tag{2.7.16}$$

积分得

$$H=\frac{1}{6}t^2q^6+P(p,t) \tag{2.7.17}$$

由式(2.7.14)、式(2.7.17)得

$$P(p,t)=\frac{1}{2t^2}p^2 \tag{2.7.18}$$

于是,有特解

$$H=\frac{1}{2t^2}p^2+\frac{1}{6}t^2q^6 \tag{2.7.19}$$

如果将此问题当作一般完整系统来研究,则式(2.7.11)给出

$$\frac{1}{2}t^2q^6-\frac{1}{2t^2}p^2+\left(t^3q^5+\frac{1}{2}p\right)\frac{\partial H}{\partial p}-$$

$$\left(\frac{1}{2}q+\frac{1}{t}p\right)\frac{\partial H}{\partial q}+\left(t^3q^5+\frac{1}{2}p\right)\widetilde{Q}=0 \tag{2.7.20}$$

取 Hamilton 函数为

$$H=\frac{p^2}{2t^2} \tag{2.7.21}$$

则由式(2.7.20)求得非势广义力为

$$\widetilde{Q}=-t^2q^5 \tag{2.7.22}$$

例 2　已知二自由度完整系统有两个积分

$$\begin{aligned}\omega_1&=p_1+q_2=C_1\\ \omega_2&=q_1-p_2-(p_1+q_2)t=C_2\end{aligned} \tag{2.7.23}$$

试用 Poisson 方法求系统的 Hamilton 函数 H 和非势广义力 $\widetilde{Q}_1$、$\widetilde{Q}_2$。

式(2.7.11)给出

$$\frac{\partial H}{\partial p_2}-\frac{\partial H}{\partial q_1}+\widetilde{Q}_1=0$$

$$-(p_1+q_2)+\frac{\partial H}{\partial p_1}-t\frac{\partial H}{\partial p_2}+\frac{\partial H}{\partial q_2}+t\frac{\partial H}{\partial q_1}-t\widetilde{Q}_1-\widetilde{Q}_2=0 \tag{2.7.24}$$

取 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}q_2^2 \tag{2.7.25}$$

则由式(2.7.24)求得

$$\widetilde{Q}_1=-p_2,\widetilde{Q}_2=0 \tag{2.7.26}$$

式(2.7.25)、式(2.7.26)是逆问题的一个特解。

参 考 文 献

[1] 梅凤翔，刘端，罗勇．高等分析力学．北京：北京理工大学出版社，1991.

[2] Галиуллин А С. Методы Решения Обратных Задач Динамики. Москва: Наука, 1986.

[3] Cartan E. Leçons sur les Invariants Intégraux. Paris: Hermann, 1921.

[4] Галиуллин А С, Мухаметзянов И А, Мухарлямов Р Г, Фурасов В Д. Построение Систем Программного Движения. Москва: Наука, 1971.

[5] Whittaker E T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Fourth Edition, Cambridge Univ Press, 1937.

[6] Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachr Kgl Ges Wiss Göttingen, Math Phys, 1918 KI, 235 - 257.

[7] Djukić Dj S, Vujanović B D. Noether's theory in classical nonconservative mechanics. Acta Mechanica, 1975, 23, 17 - 27.

[8] Bahar L Y, Kwatny H G. Extension of Noether's theorem to constrained nonconservative dynamical systems. Int J Non - Linear Mech, 1987, 22, 125 - 138.

[9] 李子平．约束系统的变换性质．物理学报，1981，30，1659 - 1671.

[10] 刘端．非完整非保守动力系统的 Noether 定理及其逆定理．中国科学. A 辑，1990，20(11)：1189 - 1197.

[11] 赵跃宇．一般动力学系统的守恒律(Ⅰ)．湘潭大学学报，1989，11，76 - 80.

[12] Mei Fengxiang. The Noether's theory of Birkhoffian systems. Science in China, Serie A, 1993, 36(12):1456 - 1467.

[13] Галиуллин А С, Гафаров Г Г, Малайшка Р П, Хван А М. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. Москва: РЖУФН, 1997.

第3章　运动控制理论中的逆问题

本章涉及构造稳定系统问题的提法和解法，以及规划运动系统构造问题的提法和解法。

稳定力学系统的解析构造问题是经典动力学逆问题之一。这就是要确定系统参数和作用于系统上的广义力，使得事先给定的可能运动（未扰运动），当有初始常作用和参数扰动时，对某些事先指定的运动品质指标来说是稳定的。构造稳定系统的理论是控制力学系统运动的学科领域之一。

在运动控制理论中，提出并解决各种物理对象和结构的质点系的解析构造问题，使得在这些系统中发生的过程满足事先提出的要求。过程的给定性质称为规划，每个性质称为规划元，而相应的过程称为系统的规划运动。质点系的规划运动，最终要靠作用在系统上的补充控制力来实现。这些力或者来自系统外部的另外系统施加的（开环控制情形），或者由系统参数变化引起的（自治控制情形），或者借助系统中的特殊控制装置来实现的（闭环控制情形）。规划运动系统的解析构造包括以下内容：(1) 确定加在系统上的力，使系统存在规划运动；(2) 确定与给定规划运动相应的系统参数的变化规律；(3) 构造控制装置的运动方程等。规划运动在初始扰动时，对运动性质本身应该是稳定的。因此，在规划运动系统的解析构造问题中，还应包括规划本身实现问题，以及确定规划运动稳定性的充分条件问题[1]。

近年新兴的非完整运动规划（Nonholonomic Motion Planning），使运动控制理论得以进一步发展[2]。

3.1 构造稳定系统问题的提法和解法

3.1.1 稳定性理论的一些结论

1. 基本概念

研究一个质点系,它的运动由下述方程来描述,即

$$F_j(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) = 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{3.1.1}$$

式中:q_i 为广义坐标;$\dot{q}_i$ 为广义速度;$\ddot{q}_i$ 为广义加速度。假设已知系统式(3.1.1) 的一个特解

$$q_j = \varphi_j(t; q_{i0}, \dot{q}_{i0}, t_0) \tag{3.1.2}$$

它满足初始条件

$$\begin{aligned} \varphi_j(t; q_{i0}, \dot{q}_{i0}, t_0) \mid_{t=t_0} &= q_{j0} \\ \dot{\varphi}_j(t; q_{i0}, \dot{q}_{i0}, t_0) \mid_{t=t_0} &= \dot{q}_{j0} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

这个解描述了系统与初始广义坐标 q_{i0} 和初始广义速度 $\dot{q}_{i0}$ 相应的一个可能运动,将此运动称为未扰运动。系统所有其他的可能运动,称为系统的扰动运动。系统的未扰运动和扰动运动是系统在同样广义力和同样参数下的可能运动。未扰运动完全由确定的初始状态式(3.1.3)引起,而所有扰动运动由不同于式(3.1.3)的、实际上是随机值的初始状态而产生。

运动的几何元和运动学元,都可作为品质指标,特别是广义坐标和广义速度。在一般情形,运动的品质指标可表示为广义坐标、广义速度和时间的函数,记作

$$P_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{3.1.4}$$

称此种函数为比较函数。

研究未扰运动式(3.1.2)对品质指标式(3.1.4)的稳定性,就是研究这些指标在扰动运动中对未扰运动中相应值的偏离。为此,组成比较函数在两种运动中的差值

$$x_s = P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - P_s(\varphi,\dot{\varphi},t) \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.1.5}$$

将此差值称为扰动。为研究稳定性，首先组成扰动的导数表达式

$$\dot{x}_s = \frac{\partial P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial t} + \frac{\partial P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial \dot{q}_\nu}\ddot{q}_\nu - \dot{P}_s(\varphi,\dot{\varphi},t) \quad (\nu,s = 1,2,\cdots,n) \tag{3.1.6}$$

其次，由此借助方程式(3.1.1)及扰动定义式(3.1.5)，消去变量 $\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、$\ddot{\boldsymbol{q}}$，因此导致扰动的微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}} = X(\boldsymbol{x},t) \tag{3.1.7}$$

质点系运动稳定性研究归结为一个数学问题，即研究微分方程组(3.1.7)在 $t \geqslant t_0$ 的行为。因此，需给出稳定性本身概念的数学定义。

Ляпунов 意义下的稳定性概念如下：如果对任给的无论多么小的正数 ε，存在一个数 δ，使得在所有初始扰动($t = t_0$)下满足条件

$$\sum_{s=1}^{n} x_{s0}^2 < \delta \tag{3.1.8}$$

在所有 $t \geqslant t_0$ 成立不等式

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2 < \varepsilon \tag{3.1.9}$$

那么，未扰运动式(3.1.2)对品质指标式(3.1.4)是稳定的；反之，运动是不稳定的。如果未扰运动是稳定的，且

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{s=1}^{n} x_s^2 = 0 \tag{3.1.10}$$

那么，是渐近稳定的。

由稳定性概念得知，在同样力作用下并有同样参数值，运动的

稳定或不稳定,在一般情形下依赖于未扰运动式(3.1.2)的选取,依赖于比较函数式(3.1.4)的选取,还依赖于初始时刻的选取。

稳定性问题可在各种形式中提出,例如,对完全给定的系统提出稳定性或不稳定性问题(系统稳定性分析),也可提出完成具有事先给定性质的稳定运动问题(规划运动)。无论怎样提法,对解析解总应事先构造:(1) 所论系统的运动方程式(3.1.1)(系统的数学模型);(2) 未扰运动式(3.1.2),要研究它的稳定性(运动方程的特解或积分流形);(3) 表示运动品质指标的比较函数式(3.1.4),要对它研究稳定性;(4) 初始时刻,通常取 $t_0 = 0$[1]。

Ляпунов 提出了研究稳定性的两种方法,即 Ляпунов 指数法和 Ляпунов 函数法。第一种方法是将扰动运动的非线性方程组(3.1.7) 按相应扰动运动一次近似表示为特殊形式的级数。扰动运动的非线性方程组的解的性状由相应的变系数线性方程组解的性状来确定。线性系统解的性状可与函数 $e^{\lambda_0 t}$ 的性状相比较来研究,这里 λ_0 为一常数,称为相应线性方程组解的特征数。在某域

$$H\{\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant H\} \tag{3.1.11}$$

上,将方程式(3.1.7) 按扰动 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的幂分解为收敛级数,其系数为时间 $t \geqslant t_0$ 的有界连续函数。因此,扰动运动方程表为

$$\dot{x}_s = p_{sk}(t) x_k + \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n \geqslant 2} P_s^{(m_1, m_2, \cdots, m_n)} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$$

$$(k, s = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1.12}$$

其中 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 为自然数。然后,利用特征数的概念来研究一次近似方程

$$\dot{x}_s = p_{sk}(t) x_k \quad (k, s = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1.13}$$

的稳定性问题,并考虑到方程式(3.1.12) 的所有高阶项。这个方法称为 Ляпунов 指数法或特征数法。第二个方法是按某个专门的函数 $V(x,t)$ 及其导数来研究稳定性。按扰动运动方程式(3.1.7) 取 V 的导数为

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s(\boldsymbol{x}, t) \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3.1.14)$$

这个方法称为 Ляпунов 函数法。

2. 特征数法

假设已知方程组(3.1.13)解的某个基础解阵

$$\boldsymbol{X} = (x_{sk}(t))_{n \times n} \qquad (3.1.15)$$

式中:$x_{sk}(t)$ 为方程组的第 k 个解。分出方程式(3.1.13)的一个解组,例如,$x_{1k}(t), \cdots, x_{nk}(t)$,此时数

$$\chi_k = \min\left\{ -\varlimsup_{t \to \infty} \frac{\ln |x_{1k}(t)|}{t}, \cdots, -\varlimsup_{t \to \infty} \frac{\ln |x_{nk}(t)|}{t} \right\} \qquad (3.1.16)$$

称为方程组(3.1.13)第 k 个解组的特征数。因此,线性方程式(3.1.13)的基础解对应 n 个特征数 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$。如果在式(3.1.16)中上限有界且与相应下限重合,那么特征数称为严格的。这时,方程式(3.1.13)第 k 个解的特征数由极限

$$-\lim_{t \to \infty} \frac{\ln |x_{sk}(t)|}{t} \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

中的最小者来确定。方程式(3.1.13)解的特征数总合最终由基础解阵式(3.1.15)的选取而确定。

特征数有如下性质。

(1) 方程组(3.1.13)的所有异于平凡解 $x_s = 0$ 的解有有限个。

(2) 方程组(3.1.13)不可能有大于 n 的带有不同特征数的解。

(3) 方程组(3.1.13)解系的特征数之和满足不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_k \leqslant \chi\left\{ \exp \int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}(t) \, \mathrm{d}t \right\} \qquad (3.1.17)$$

其中

$$\chi(f(t)) = -\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}$$

为函数$f(t)$的特征数。

直接计算方程组(3.1.13)的特征数,仅在找到了相应解系式(3.1.15)的极个别情形才是可能的。但是,在用特征数法研究稳定性问题时,只需建立这些数的分布边界,或只需确定其符号。

下面一些命题给出特征数的估计。

命题1 如果方程组(3.1.13)的系数$p_{sk}(t)$使得行列式

$$\det(p_{sk}(t)+p_{ks}(t))_{n\times n} \qquad (3.1.18)$$

的主对角子式是变号的,且当$t\geqslant t_0$时函数$p_{11}(t)$是负的,那么,系统解的特征数是正的。

命题2 方程组(3.1.13)解的特征数满足不等式

$$\chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right\}\geqslant\chi(x)\geqslant\chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\} \quad (3.1.19)$$

这里$\alpha(t)$,$\beta(t)$为方程

$$\det\left(\frac{p_{sk}(t)+p_{ks}(t)}{2}-\delta_{sk}\lambda\right)_{n\times n}=0 \qquad (3.1.20)$$

在所有$t\geqslant t_0$时的最小与最大根。

由命题2得知,为使方程组(3.1.13)解的特征数为正,只要

$$\chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\beta(t)\,\mathrm{d}t\right\}>0$$

在方程组(3.1.13)的系数满足某些补充条件的特殊情形,可得到相应特征数的精确边界,并可由这些系数来计算特征数的值。因此有如下命题。

命题3 如果方程组(3.1.13)的系数在充分大值$t\geqslant t_0$满足不等式

$$p_{11}(t)\geqslant P(t)+2(n-1)Q(t) \qquad (3.1.21)$$

这里$P(t)=\max(p_{ss}(t))(s=2,3,\cdots,n)$,$Q(t)=\max(p_{sk}(t))(s,$

$k=1,2,\cdots,n;s\neq k$)，那么，系统解的最小特征数处于下列边界

$$-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[p_{11}(t)+(n-1)Q(t)]\mathrm{d}t \qquad (3.1.22)$$

和

$$-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[p_{11}(t)-(n-1)Q(t)]\mathrm{d}t \qquad (3.1.23)$$

之间。

命题4 如果方程组(3.1.13)的系数在$t\geqslant t_0$时满足条件

$$\lim_{t\to\infty}p_{sk}(t)=0 \quad (s,k=1,2,\cdots,n;s\neq k) \qquad (3.1.24)$$

$$p_{11}(t)\geqslant p_{ss}(t)+\varepsilon \quad (s=2,3\cdots,n) \qquad (3.1.25)$$

其中ε为某正常数，那么方程组解的最小特征数等于

$$-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}p_{11}(t)\mathrm{d}t \qquad (3.1.26)$$

命题5 如果方程组(3.1.13)的系数在$t\geqslant t_0$时满足条件

$$\lim_{t\to\infty}p_{sk}(t)=0 \quad (s,k=1,2,\cdots,n;s\neq k) \qquad (3.1.27)$$

$$p_{s-1,s-1}(t)\geqslant p_{ss}(t)+\varepsilon \quad (s=2,3,\cdots,n) \qquad (3.1.28)$$

这里ε为某正常数，那么方程组解的特征数等于

$$-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}p_{ss}(t)\mathrm{d}t \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (3.1.29)$$

注意到，系数矩阵非对角元素在$t\to\infty$时趋于零的线性微分方程组称为几乎对角方程组。在几乎对角方程组情形，当满足条件式(3.1.28)时，可直接计算出方程组解的最小特征数，而允许得到特征数最广正性条件。

有时方程组的特征数通过另一方程组的特征数来估计。下述命题给出一种可能性。

命题6 如果方程组(3.1.13)中系数$p_{sk}(t)$在$t\to\infty$时趋于定极限c_{sk}，那么该方程组解的特征数与极限方程组解的特征数相

重合。

命题 7　常系数方程组

$$\dot{x}_s = a_{sk}x_k \quad (s,k=1,2,\cdots,n;a_{sk}=常数) \tag{3.1.30}$$

的解的特征数等于相应特征方程

$$D(p)=(-1)^n\det(a_{sk}-\delta_{sk}p)_{n\times n}=0 \tag{3.1.31}$$

的根的实部差一符号。

下面研究规划方程组。

令

$$\mu = \chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}p_{ss}(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}\chi_k$$

则式(3.1.17) 写成

$$\sigma \leqslant \mu \tag{3.1.32}$$

如果所论线性方程组满足条件

$$\sigma = \mu \tag{3.1.33}$$

则称这个方程组是规划的。由此得知，线性微分方程组规划性的充要条件是，存在解的基础矩阵，其特征数满足等式

$$\sum_{k=1}^{n}\chi_k = \chi\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}p_{ss}(t)\,\mathrm{d}t\right\} \tag{3.1.34}$$

下面几个命题给出方程组规划性判据。

命题 8　为使方程组(3.1.13) 是规划的，只要 $t \geqslant t_0$ 存在有界、连续矩阵 $\boldsymbol{F}=(f_{sk}(t))_{n\times n}$，它有逆 $\boldsymbol{F}^{-1}$，导数为 $\dot{F}$，使得 $t \geqslant t_0$ 时成立等式

$$\frac{\partial \det\boldsymbol{F}}{\partial f_{kj}}(f_{ls}p_{lj}+\dot{f}_{sj}) = 0 \quad (j,l=1,2,\cdots,n;k>s=1,2,\cdots,n-1) \tag{3.1.35}$$

且存在

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial \det \boldsymbol{F}}{\partial f_{sj}}(f_{ls}p_{lj}+\dot{f}_{sj})\frac{1}{\det \boldsymbol{F}}\mathrm{d}t \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

(3.1.36)

命题 9 如果方程组(3.1.13)是几乎对角的,其解的特征数是严格的,且当 $t\geqslant t_0$ 时成立等式

$$p_{s-1,s-1}(t)\geqslant p_{ss}(t)+\varepsilon \quad (s=2,3,\cdots,n) \tag{3.1.37}$$

其中 ε 为某正常数,那么方程组是规划的。

命题 10 对三角方程组

$$\dot{x}_s=p_{s1}(t)x_1+\cdots+p_{ss}(t)x_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.1.38}$$

是规划的,其充要条件是存在

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}p_{ss}(t)\mathrm{d}t \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.1.39}$$

命题 11 常系数线性微分方程组是规划的。

下面建立一类线性微分方程规划组,称为可约微分方程组。将方程组(3.1.13)表示为矢量—矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} \tag{3.1.40}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{P}(t)=(p_{sk}(t))_{n\times n}$。引入线性变换

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x} \tag{3.1.41}$$

如果矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$、$\dot{\boldsymbol{F}}(t)$ 和 $\det\boldsymbol{F}^{-1}(t)$ 在 $t\geqslant t_0$ 时是连续的、有界的,那么,变换式(3.1.41)称为 Ляпунов 变换。变换式(3.1.41)使方程组(3.1.40)变换为

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{y} \tag{3.1.42}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(t)=\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{-1}$。此时,方程组(3.1.40)和变换了的方程组(3.1.42)的特征数重合,且方程组(3.1.40)的规划性引起方程组(3.1.42)的规划性,反之亦然。假设存在 Ляпунов 变换,使线性方程组(3.1.40)引向常系数方程组

$$\dot{y} = Ay \tag{3.1.43}$$

其中$A = (a_{sk})_{n\times n}$。此时,方程组(3.1.40)称为可约方程组。

命题 12 方程组(3.1.13)可约的充分必要条件是存在伴随方程组

$$\dot{z} + zP(t) = 0 \tag{3.1.44}$$

的解的基础矩阵,有形式

$$z = e^{-At}F(t) \tag{3.1.45}$$

其中$A = (a_{sk})_{n\times n}$为常矩阵,$F = (f_{sk}(t))_{n\times n}$为$t \geqslant t_0$时连续有界矩阵,且有有界的$\det F^{-1}$。

需注意,如对所有$t \geqslant t_0$成立等式

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}(t)\,dt = t\sum_{s=1}^{n} a_{ss} + \varepsilon(t) \tag{3.1.46}$$

其中$\varepsilon(t)$为某个有界函数,那么$\det F^{-1}$在$t \geqslant t_0$时是有界的。

现在列举一些稳定性定理。

研究非线性非定常质点系,其扰动方程用式(3.1.12)来描述。

命题 13 如果一次近似方程组(3.1.13)是规则的,而其解的最小特征数是正的,那么,未扰运动$x = 0$在考虑到扰动方程组的高阶项时是稳定的。

研究非线性定常系统。在此情形,一次近似方程组解的特征数由相应特征方程

$$D(p) = (-1)^n \det(p_{sk} - \delta_{sk}p)_{n\times n} = 0 \tag{3.1.47}$$

的根的实部来确定并取反号,而一次方程组本身是规划的。

命题 14 如果特征方程式(3.1.47)的所有根的实部是负的,那么,未扰驻定运动$x = 0$在考虑到扰动运动方程的高阶项时是渐近稳定的。

因此,在所论情形中稳定性的充分条件是特征方程式(3.1.47)的根分布在平面$\{\mathrm{Re}p, \mathrm{Im}p\}$的虚轴之左。将特征方程式

(3.1.47)表示为

$$D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n \tag{3.1.48}$$

其中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是依赖于扰动运动一次近似方程系数 p_{sk} = 常数的已知表达式。由方程式(3.1.48)的系数组成如下矩阵

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{3.1.49}$$

此矩阵的对角行列式

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \tag{3.1.50}$$

称为 Hurwitz 行列式。

命题 15 如果对应于特征方程式(3.1.48)的所有 Hurwitz 行列式(3.1.50)都是正的，那么，未扰运动 $x=0$ 是渐近稳定的。

命题 16 如果特征方程式(3.1.48)的所有系数都是正的，且满足条件

$$\Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \Delta_7 > 0, \cdots \tag{3.1.51}$$

或者条件

$$\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \cdots \tag{3.1.52}$$

那么，未扰运动 $x=0$ 是渐近稳定的。

注意，上述按一次近似的稳定性定理，在系统不是定常的，但时间 t 仅明显出现于扰动方程的二阶和更高阶项系数中的情形也成立。

3. Ляпунов 函数法

研究非线性非定常方程组的稳定性问题，此时扰动方程为

$$\dot{x}_s = X_s(x_k, t) \quad (X_s(0,t) = 0, s, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1.53}$$

其中 $X_s(x_k,t)$ 为某域

$$H\left\{\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant H\right\} \times T\{t \geqslant t_0\} \qquad (3.1.54)$$

上对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的全纯函数。

研究函数 $V(\boldsymbol{x},t)$，它在域(式(3.1.54))上给定，在未扰运动 $x_s=0$ 中趋于零。假设这个函数在域(式(3.1.54))上是单值的、有界的、连续的。有下述定义。

定义 1 如果满足上面所指条件的函数 $V(\boldsymbol{x},t)$ 对充分大的 t_0 和充分小的 H，除零值外取同号值，那么，此函数称为常号的。如果 $V(\boldsymbol{x},t)\geqslant 0$，则称常正的；如果 $V(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0$，则称常负的。

定义 2 如果不依赖于 t 的常号函数 $W(\boldsymbol{x})$，在域 H 上仅在未扰运动 $\boldsymbol{x}=0$ 中为零，那么称它为定号的。如果 $W(\boldsymbol{x})>0$，称为正定的；如果 $W(\boldsymbol{x})<0$，则称为负定的。

定义 3 如果对不依赖于 t 的函数 $V(\boldsymbol{x},t)$ 可找到不依赖于 t 的正定函数 $W(\boldsymbol{x})$，使在域(式(3.1.54))上成立 $V(\boldsymbol{x},t)\geqslant W(\boldsymbol{x})$，则称 $V(\boldsymbol{x},t)$ 为正定的；而当 $-V(\boldsymbol{x},t)\geqslant W(\boldsymbol{x})$，则称 $V(\boldsymbol{x},t)$ 为负定的。

定义 4 如果函数 $V(\boldsymbol{x},t)$，对所有无论多么小的正数 l，总可以找到一个数 λ，使在所有 $t\geqslant t_0$ 及 $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant \lambda$ 下，成立不等式 $|V(\boldsymbol{x},t)|<l$，那么，称为允许有无限小上界的函数。

具有上面所指性质(常号，定号，无限小上界存在)的函数 $V(\boldsymbol{x},t)$ 称为 Ляпунов 函数。进而假设，Ляпунов 函数在域(式(3.1.54))上是可微的，并且按扰动运动方程(式(3.1.53))组成对时间 t 的导数，即

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial V}{\partial t} \quad (s=1,2,\cdots,n) \quad (3.1.55)$$

对它也可进行常号或定号的讨论。

下面给出稳定性定理。

命题 17 如果对扰动运动微分方程式(3.1.53)，可找到一个

定号函数 $V(\boldsymbol{x},t)$，其按这些方程的导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$ 是与 $V(\boldsymbol{x},t)$ 反号的常号函数或恒等于零，那么，未扰运动 $\boldsymbol{x}=0$ 是稳定的。

命题 18 如果对扰动运动方程组，存在定号函数 $V(\boldsymbol{x},t)$，允许有无限小上界，而按方程组组成的导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$ 是与 $V(\boldsymbol{x},t)$ 反号的定号函数，那么，未扰运动是渐近稳定的。

Ляпунов 函数法允许按一次近似方程得到稳定性的结论。设扰动运动方程组(3.1.53)的一次近似方程为

$$\dot{x}_s = p_{sk}(t)x_k \quad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{3.1.56}$$

未扰运动的稳定性有下述命题。

命题 19 如果对于一次近似方程式(3.1.56)，存在定号函数 $V(\boldsymbol{x},t)$，允许有无限小上界，按方程式(3.1.56)有与 $V(\boldsymbol{x},t)$ 反号的定号函数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$，那么，考虑到扰动方程组(3.1.53)的高阶项 $X_s^{(2)}(\boldsymbol{x},t)$，当在扰动运动方程式(3.1.53)右端的所有定义域上，对充分小的常数 A，满足条件

$$|X_s^{(2)}(\boldsymbol{x},t)| < A(|x_1| + \cdots + |x_n|) \tag{3.1.57}$$

时，未扰运动是渐近稳定的。

下面举例说明稳定性定理的应用。

例 1 设扰动运动方程组为

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -3x+y-z+3x(6x^2+5y^2+2z^2) \\
\dot{y} &= -2x-5y+z+5y(6x^2+5y^2+2z^2) \\
\dot{z} &= 2x-y-2z+2z(6x^2+5y^2+2z^2)
\end{aligned} \tag{3.1.58}$$

它的一次近似方程的特征方程为

$$D(p) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3-p & 1 & -1 \\ -2 & -5-p & 1 \\ 2 & -1 & -2-p \end{vmatrix} =$$

$$p^3+10p^2+36p+47=0$$

Hurwitz 行列式为

$$\Delta_1 = a_1 = 10 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 47 \\ 1 & 36 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = 47\Delta_2 > 0$$

由命题 15 可知,未扰运动 $x = y = z = 0$ 是渐近稳定的。

例 2 设扰动运动方程组为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= n(t)y + m(t)x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -n(t)x + m(t)y(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{3.1.59}$$

取 V 函数为

$$V = x^2 + y^2$$

它是正定的。按方程求 $\dot{V}$ 得

$$\dot{V} = 2m(t)(x^2 + y^2)^2$$

若从某时刻 $t = T$ 起,总有 $m(t) \leqslant 0$,则 $\dot{V}$ 为常负函数。由命题 17 可知,未扰运动 $x = y = 0$ 是稳定的,而不管函数 $n(t)$ 如何。

例 3 设扰动运动方程组为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1 + \sin^2 t)x + (1 - \sin t \cos t)y \\ \dot{y} &= -(1 + \sin t \cos t)x - (1 + \cos^2 t)y \end{aligned} \tag{3.1.60}$$

取 V 函数为

$$V = x^2 + y^2$$

它是正定的。按方程求 $\dot{V}$ 得

$$\dot{V} = -2(x^2 + y^2) - 2(x\sin t + y\cos t)^2$$

它是负定的。由命题 18 可知,未扰运动 $x = y = 0$ 是渐近稳定的。

有关稳定性理论已有大量专著出版,参见参考文献[3 - 13]。

3.1.2 构造稳定系统问题的提法

研究一质点系,其运动用如下常微分方程描述

$$F_j(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t, u_l) = 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,n; l = 1,2,\cdots,m) \tag{3.1.61}$$

式中：q_i 为广义坐标；u_l 为系统的控制，控制或为系统的固有参数，或为控制系统运动的广义力；F_j 是一些函数。

提出如下逆问题：确定系统的参数以及表为时间函数的控制力 $u_1(t),\cdots,u_m(t)$，使得给定运动

$$\Omega: q_i=\varphi_i(t), \varphi_i(t)\in C^2 \quad (t\geqslant t_0) \tag{3.1.62}$$

是所论系统的一个可能运动，并且对给定的运动品质指标（比较函数）

$$P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\in C^1 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.1.63}$$

当这些指标在初始时刻 t_0 对给定运动值式(3.1.62)发生充分小偏离时，是稳定的[1]。

所提逆问题是运动方程的修改问题。但是，在这里运动方程不仅按给定运动式(3.1.62)是一个可能运动的要求来修改，而且考虑到给定运动式(3.1.62)是稳定的补充要求来修改，并且只用选取控制 $u_l(t)$ 而不改变运动方程式(3.1.61)的结构的办法来得以保证。

如果系统给定运动是一个可能运动，而它实际上是实现不了的，因为为此还需要真实运动的初始条件与给定运动的初始条件相重合。这就是为什么在研究动力学逆问题时，除了给定运动的可实现性需要外，还需要在有初始扰动时是稳定的。因此，所提问题应分两步来解。首先，在给定运动式(3.1.62)精确地实现的前提下来解动力学逆问题。为此，建立给定运动实现的必要条件为

$$F_j(\varphi_i(t),\dot{\varphi}_i(t),\ddot{\varphi}_i(t),t,u_l)=0 \tag{3.1.64}$$

假设这些条件组成对控制 $u_l(t)$ 的待定方程组。此时，这些条件在某种程度上确定待求参数和控制力，使得在这些参数和控制力下给定运动式(3.1.62)是质点系的一个可能运动。其次，利用选取控制 $u_l(t)$ 的办法，来解给定运动式(3.1.62)相对运动的品质指标式(3.1.63)在有初始扰动时确保稳定性的问题。将式(3.1.62)取为未扰运动，组成扰动运动方程

$$\dot{x}_s = X_s(x_k, t, u_l) \quad (s, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1.65}$$

其中

$$x_s = P_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - P_s(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), t)$$
$$X_s(0, t, u_l) = 0$$

利用研究稳定性的某种方法，建立扰动运动方程组(3.1.65)平凡解 $x_s = 0$ 的稳定性充分条件。在一般情形下，这些条件表示为对控制 $u_l(t)$ 的某些不等式

$$S_s(\varphi_k(t), \dot{\varphi}_k(t), \ddot{\varphi}_k(t), t, u_l) \geqslant 0 \tag{3.1.66}$$

稳定性条件式(3.1.66)与存在条件式(3.1.64)一起最终可确定系统的待求参数和控制力，使得给定运动式(3.1.62)是系统的一个可能运动，并且当有初始扰动时对品质指标式(3.1.63)是稳定的。

3.1.3 构造稳定系统问题的解法

1. 特征数法的应用

假设在解所提建立稳定系统问题时，相应的扰动运动方程有如下形式，即

$$\dot{x}_s = p_{sk}(t, \boldsymbol{u})x_k + X_s^{(2)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}) \quad (s, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1.67}$$

式中：p_{sk} 为 $t \geqslant t_0$ 时 t、u_l 的有界连续函数；$X^{(2)}$ 为其变量在某域上的全纯函数，其对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的幂的展开式从不低于二阶开始。在一般情形，质点系扰动运动方程是非线性的，且明显含 t，称为非定常系统，而未扰运动 $x_s = 0(s = 1, 2, \cdots, n)$ 称为非驻定运动。当扰动方程不显含 t 时，系统称为定常的，而未扰运动称为驻定的。

建立稳定系统问题有如下提法：按扰动运动的一次近似方程

$$\dot{x}_s = p_{sk}(t, \boldsymbol{u})x_k \quad (s, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1.68}$$

来确定控制 $u_l(t)$，使得由未扰运动 $x_s = 0(s = 1, 2, \cdots, n)$ 确定的给定运动在扰动方程式(3.1.67)中考虑到高阶项 $X^{(2)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u})$ 时，

是稳定的。

特征数方法对构造稳定系统问题的解很有用。问题如下：系统运动用方程式(3.1.61)来描述，需要确定控制 $u_l(t)$（系统参数和可控广义力），使得给定运动式(3.1.62)是系统的一个可能运动，并且对给定的运动指标（比较函数）式(3.1.63)是稳定的。

为解此问题，首先建立给定运动的存在条件式(3.1.64)；然后将给定运动式(3.1.62)当作未扰运动组成扰动运动的一次近似方程式(3.1.68)。需要注意的是，扰动方程的高阶项满足按一次近似的稳定性问题提法中指出的条件。进而，借助前面指出的关于规划性和特征数的命题，组成方程组(3.1.68)的规划性以及解的特征数的正性的充分条件。这些条件表示为不等式(3.1.66)。而根据 Ляпунов 关于一次近似的稳定性定理，这些条件就是给定运动稳定性的充分条件。系统的待求参数和控制力 $u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t)$ 在 $t\geqslant t_0$ 时确定为有界的、连续的函数，同时满足条件式(3.1.64)和不等式(3.1.66)。

研究构造稳定系统问题：系统的扰动运动用方程式(3.1.67)来描述，需要确定常参数 $u_1,u_2,\cdots,u_m$，使得未扰运动 $x_s=0(s=1,2,\cdots,n)$ 是稳定的。此时，一次近似方程的系数 p_{sk} 为常数，而问题归结为寻求参数空间 $\{u\}$ 的点 $M(u_1,u_2,\cdots,u_m)$，对这些点方程

$$D(p,u)=(-1)^n\det(p_{sk}(u)-\delta_{sk}p)_{n\times n}=0 \quad (3.1.69)$$

或方程

$$D(p,u)=p^n+a_1(u)p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(u)p+a_n(u)=0 \quad (3.1.70)$$

的根分布在根平面 $\{\mathrm{Re}p,\mathrm{Im}p\}$ 的左半部，具有所指性质的点 M 的集合，称为参数空间 $\{u\}$ 的稳定性区域，或 $D\{n,0\}$ 域。点 $M(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 的坐标使方程式(3.1.70)的 m 个根分布在根平面虚轴的右半部，$n-m$ 个在左半部，则称此域为 $D\{n-m,m\}$ 域。在参数空间 $\{u\}$ 中按照方程式(3.1.70)根的各种分布分出 D 域，称为参数空间的 D－划分；限制这些区域的超曲面，称为 D 域边界。因

此,所研究问题的解归结为建立 D 域边界,在参数空间 $\{u\}$ 中的稳定性区域 $D\{n,0\}$ 的精确区域 $D\{n,0\},D\{n-1,1\},\cdots,D\{0,n\}$ 不存在。在 $D\{n,0\}$ 不存在的情形,系统是结构不稳定的,此时不能用选参数的办法达到稳定性。

建立稳定性区域 $D\{n,0\}$ 的边界,有如下方法[1]。

(1)对方程式(3.1.70)组成 Hurwitz 行列式 $\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$。一般情形下,Δ_i 是待求参数 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的函数。进而,对这些参数组成不等式

$$\Delta_i(u_1,\cdots,u_m)>0\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{3.1.71}$$

并分出这些参数的值域以确保未扰运动 $x_s=0(s=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性。

(2)当特征方程式(3.1.70)的系数仅依赖于一个参数 u_0 时,在平面 $\{u_0,\Delta_i\}$ 上作曲线 $\Delta_i=\Delta_i(u_0)(i=1,2,\cdots,n)$。此时,使曲线 $\Delta_i=\Delta_i(u_0)$ 位于上半平面的横轴上的线段分出待求的稳定性区域。

(3)一般情形下,D 域边界由方程

$$a_n(u_1,\cdots,u_m)=0,\Delta_{n-1}(u_1,\cdots,u_m)=0\tag{3.1.72}$$

来确定。这些方程,就是至少一个或一对根分布在虚轴上的条件,在空间中分出各种 D 域,包括稳定域 $D\{n,0\}$。

(4)当 ω 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时,D 域边界也可由方程

$$\mathrm{Re}D(\mathrm{i}\omega,u)=0,\quad\mathrm{Im}D(\mathrm{i}\omega,u)=0\tag{3.1.73}$$

来描述。这些方程,将方程式(3.1.70)的根平面虚轴映射到 D 域边界,反之亦然,也在参数空间中分出 D 域。

应用举例见第5章。

2. Ляпунов 函数法的应用

假设,对给定运动式(3.1.62)组成它存在的必要条件式(3.1.64),进而假设这些条件以其分量可自由选择来确定控制 $u_l(t)$。下一步的问题是,先确定控制分量 $u_1(t),\cdots,u_m(t)$,使得给定运动式(3.1.62)对给定的品质指标 $P_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(s=1,2,\cdots,n)$

在有初始扰动时是稳定的(或渐近稳定的)。

为解此问题,可应用 Ляпунов 函数法。首先,组成扰动运动方程式(3.1.65),其平凡解 $x_s=0(s=1,2,\cdots,n)$ 对应系统的给定运动式(3.1.62)。然后,应用稳定性命题 17 ~ 命题 19,来构造某个正定函数 $V(\boldsymbol{x},t)$。进而,按扰动运动方程式(3.1.65)来确定对时间的导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$。按 Ляпунов 命题 17,稳定性的充分条件由这个导数的常负条件或恒等于零来确定。在渐近稳定情形,按 Ляпунов 命题 18,相应的条件是所组成的正定函数应有无限小上界,并且按扰动运动方程有负定的导数。设稳定(渐近稳定)条件表示为不等式(3.1.66),此时构造稳定系统问题的控制分量 $u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t)$ 由条件式(3.1.66)确定为 $t\geqslant t_0$ 时的有界、连续函数,同时满足给定运动的存在条件式(3.1.64)。

3.1.4 自激陀螺的永久转动

研究下述力学逆问题:确定加在陀螺中心主轴 x、y、z 上的扰动力矩 M_1、M_2、M_3 以及加在陀螺对这些轴的惯性矩 A、B、C 上的条件,使得陀螺按给定性质

$$\Omega:\begin{cases}\omega_1=x_1-a\exp\left(-\dfrac{b}{A}t\right)=C_1\\ \omega_2=x_2^2+x_3^2=C_2\end{cases}\tag{3.1.74}$$

的转动运动是一个可能运动,其中 x_1、x_2、x_3 是陀螺瞬时角速度在主轴上的投影,a、b、C_1、C_2 为常数。

为解上述逆问题,首先,组成存在给定运动的必要条件,实际上这就是在解动力学逆问题时对待求量的方程。Euler 动力学方程为

$$\begin{aligned}A\dot{x}_1&=(B-C)x_2x_3+M_1\\ B\dot{x}_2&=(C-A)x_3x_1+M_2\\ C\dot{x}_3&=(A-B)x_1x_2+M_3\end{aligned}\tag{3.1.75}$$

将式(3.1.74)对时间 t 求一次导数,并利用方程式(3.1.75)消去 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$、$\dot{x}_3$,得到

$$(B-C)x_2x_3+M_1+ab\exp\left(-\frac{b}{A}t\right)=0$$

$$[C(C-A)-B(B-A)]x_1x_2x_3+CM_2x_2+BM_3x_3=0 \tag{3.1.76}$$

由此得知,如果取

$$M_1=b(C_1-x_1),\quad M_2=M_3=0,\quad B=C \tag{3.1.77}$$

则式(3.1.76)成立,而陀螺就按给定性质式(3.1.74)而运动。条件式(3.1.77)是陀螺存在给定转动运动式(3.1.77)的最简单情形。取式(3.1.77)作为问题的待求解,此时运动方程有形式

$$\begin{aligned}A\dot{x}_1&=b(C_1-x_1)\\ B\dot{x}_2&=(B-A)x_3x_1\\ B\dot{x}_3&=(A-B)x_1x_2\end{aligned} \tag{3.1.78}$$

此方程有平凡解

$$x_1=C_1,\quad x_2=x_3=0 \tag{3.1.79}$$

这对应陀螺绕 x 轴的永久转动。

其次,应用 Ляпунов 函数法建立陀螺永久转动对瞬时角速度投影 x_1、x_2、x_3 的稳定性条件。取永久转动式(3.1.79)为陀螺的未扰运动。令陀螺瞬时角速度投影的扰动为 y_1、y_2、y_3,有

$$y_1=x_1-C_1,\quad y_2=x_2,\quad y_3=x_3 \tag{3.1.80}$$

将式(3.1.80)代入方程式(3.1.78),得到扰动运动方程

$$\begin{aligned}A\dot{y}_1&=-by_1\\ B\dot{y}_2&=(B-A)(y_1+C_1)y_3\\ B\dot{y}_3&=(A-B)(y_1+C_1)y_2\end{aligned} \tag{3.1.81}$$

注意到,Ляпунов 特征数法不能解决所提稳定性问题,因为当 $b>$

0 时,对应的特征方程有一对纯虚根(临界情形)。取 Ляпунов 函数为

$$V = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \tag{3.1.82}$$

它是正定的。按方程式(3.1.81)计算 $\dot{V}$,有

$$\dot{V} = -2\frac{b}{A}y_1^2 \tag{3.1.83}$$

当 $b>0$ 时,$\dot{V}$ 是变量 y_1、y_2、y_3 的常负函数。因此,由命题 17 可知,自激对称陀螺的永久转动式(3.1.79)在 $b>0$ 时是稳定的。

3.2 规划运动系统的构造

本节讨论其运动用常微分方程描述的质点系。此时,规划运动系统的构造问题归结为相应的动力学逆问题,提出给定性质(运动规划)在 Ляпунов 意义下(当有初始偏离时)稳定性的补充要求。规划运动系统的解析构造问题的解归结为按运动方程的已知特殊积分来建立系统相应运动方程的问题,并使得反映系统运动的给定性质的这些积分是稳定的。本节还提出并解决构造积分泛函问题,此泛函在按给定的规划所建立的运动方程的解上取驻值。

3.2.1 规划运动系统构造问题的提法

规划运动系统的解析构造归结为建立所论质点系的运动方程,使得给定规划运动是一个可能的运动。由所建立的运动方程进一步确定控制力,系统的相应参数,以实现给定的规划运动,以及控制装置的方程以封闭事先已知的运动方程。但是,所确定的控制元(力,参数,调节器)不能保证精确地完成规划运动。仅当实际运动中广义坐标和广义速度的初值与其在规划运动(当有初始扰动时)中重合时,规划运动才能发生。实际上,这些初始扰动总是存在的。在没有另外类型的扰动(常作用的和参数的)时,规

划运动的精确实现是不可能的。这只要规划运动成为稳定的(渐近稳定的)就行了。这实际上是可能的,因为按给定的规划构造运动方程问题的解,以最终确定控制元,并不是唯一的。利用这种不唯一性,可以预先确定控制元,使得给定的规划运动是所论系统的稳定运动。于是,有下列提法:建立质点系的运动方程

$$\ddot{q}_\nu = Q_\nu(q_s, \dot{q}_s, t) \quad (\nu, s = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.2.1}$$

使得按给定性质

$$\Omega: \omega_\mu(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \cdots, m \leqslant n) \tag{3.2.2}$$

的规划运动是系统的一个可能运动,并且当有与这些性质初始偏离时对这些性质是稳定的。

在此假设给定性质式(3.2.2)是相容的且独立的,函数 $\omega_\mu(q_s, \dot{q}_s, t)$本身在空间某给定域 $G\{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\}$ 在所有 $t \geqslant t_0$ 时是有界的且可微的;方程式(3.2.1)右端是一类函数,允许解在规划某 ε 领域 $\Omega_\varepsilon\{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\}$ 中存在和唯一。

所提问题是规划运动质点系的解析构造问题的相当一般的数学提法[1]。

在借助补充的控制力(开环控制系统)来规划系统运动时,相应于给定规划式(3.2.2)的运动方程有如下形式,即

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(q_s, \dot{q}_s, t) + Q_{u\nu}(q_s, \dot{q}_s, t) \quad (\nu, s = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.2.3}$$

式中:$Q_{0\nu}\{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\}$ 是由给定广义力确定的已知函数;$Q_{u\nu}\{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\}$ 为待求控制力。这些方程可直接用以确定为实现规划运动所必须的控制力。

在用运动过程中参数的改变来规划系统运动(自治控制系统)时,系统运动方程的结构是已知的,有

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(q_s, \dot{q}_s, t, v_l) \tag{3.2.4}$$

式中:$v_l(l = 1, 2, \cdots, k)$ 为系统的参数,而系统相应的规划运动有形式式(3.2.1)。于是,系统待求参数由等式

$$Q_{0\nu}(q_s,\dot{q}_s,t,v_l) = Q_\nu(q_s,\dot{q}_s,t) \qquad (3.2.5)$$

来确定。

如果借助特殊的控制装置(闭环控制系统)来研究规划运动,根据给定规划式(3.2.1),对控制装置的广义输出坐标 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的方程有如下形式,即

$$\ddot{u}_l = U_l(q_s,\dot{q}_s,t,u_p,\dot{u}_p) \quad (l,p = 1,2,\cdots,m) \quad (3.2.6)$$

此时,假设描述控制对象连同控制装置的方程

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(q_s,\dot{q}_s,t,u_l,\dot{u}_l) \qquad (3.2.7)$$

是已知的。

3.2.2 运动方程和规划稳定性

1. 运动方程

质点系的规划运动方程,可根据在解相应动力学逆问题时所得到的运动方程来直接建立。此时,描述系统运动的给定运动学性质的规划式(3.2.2)本身应作为待求运动方程的积分来研究。

在借助补充控制力和借助系统参数改变来规划运动的情形,运动方程可作为建立运动方程的基本问题来组成,并有如下形式,即

$$\ddot{q}_\nu = \frac{1}{\Gamma}\Gamma_{ji}(\Phi_j - \varphi_j)\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\nu} + Q_\nu^\tau$$

$$(\nu = 1,2,\cdots,n; i,j = 1,2,\cdots,m) \qquad (3.2.8)$$

其中 Q_σ^τ 满足条件

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\sigma}Q_\sigma^\tau = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,m; \sigma = 1,2,\cdots,n) \qquad (3.2.9)$$

方程式(3.2.8)一般情形下包含$(n-m)$个任意函数 $Q_s^\tau(s=m+1,\cdots,n)$。函数 $\Phi_j = \Phi_j(\omega,q,\dot{q},t)$ 也是任意的,仅仅满足条件 $\Phi_j(0,q,\dot{q},t) = 0(j=1,2,\cdots,m)$。在式(3.2.8)中,有

$$\Gamma = \det\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial \dot{q}_\sigma}\ \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)_{m\times m} \quad (\sigma = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.10}$$

而 Γ_{ji} 为 Γ 元素 (j,i) 的代数余子式，又

$$\varphi_j = \frac{\partial \omega_j}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial \omega_j}{\partial t} \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.11}$$

所组成的运动方程式(3.2.8)可以确定控制力，在这些控制力作用下，规划运动式(3.2.2)是所论质点系的一个可能运动。为此，假设方程式(3.2.8)的右端部分是广义力 $Q_{0\nu}\{q,\dot{q},t\}$ 和待求控制力 $Q_{u\nu}$ 的和，于是有

$$Q_{u\nu} = \frac{1}{\Gamma}\Gamma_{ji}(\Phi_j - \varphi_j)\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\nu} + Q_\nu^\tau - Q_{0\nu}(q,\dot{q},t) \quad (i,j,\nu = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.12}$$

方程式(3.2.8)也可确定运动过程中系统参数的改变，使规划运动式(3.2.2)是所论质点系的一个可能运动。为此，假设方程式(3.2.8)的右端部分是依赖于系统待求参数 v_l 的已知函数 $Q_{0\nu}\{q,\dot{q},t,v_l\}$。此时，对 v_l 解方程

$$Q_{0\nu}(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t,v_l) = \frac{1}{\Gamma}\Gamma_{ji}(\Phi_j - \varphi_j)\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\nu} + Q_\nu^\tau \quad (i,j,\nu = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.13}$$

便可确定系统待求参数 v_l。

在借助控制装置来规划运动时，作为封闭给定方程来构造方程问题的解，可组成待求运动方程，有以下形式，即

$$\ddot{q}_\nu = Q_{0\nu}(q,\dot{q},t,u,\dot{u}) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n)$$

$$\ddot{u}_\rho = \frac{1}{\Gamma^*}\Gamma_{ji}^*(\Phi_j^* - \varphi_j^*)\frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \dot{u}_\rho} + U_\rho^\tau \tag{3.2.14}$$

$$(i,j = 1,2,\cdots,m;\rho = 1,2,\cdots,r)$$

其中 U_ρ^τ 满足条件

$$\frac{\partial \dot{\omega}_\mu}{\partial \dot{u}_\rho} U_\rho^\tau = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.15}$$

方程式(3.2.14)的第一组是控制对象的方程,第二组则是控制装置的方程。方程式(3.2.14)在一般情形包含$(n-m)$个任意函数$U_{m+1}^\tau(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t),\cdots,U_n^\tau(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$;函数$\Phi_j^*(\boldsymbol{\omega},\dot{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$也是任意的,仅仅满足条件$\Phi_j^*(0,0,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0(j=1,2,\cdots,m)$。在方程式(3.2.14)中,有

$$\Gamma^* = \det\left(\frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \dot{u}_\rho}\frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial \dot{u}_\rho}\right)_{m\times m} \quad (\rho = 1,2,\cdots,r) \tag{3.2.16}$$

Γ_{ji}^*为Γ^*元素(j,i)的代数余子式,而

$$\varphi_j^* = \frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial \dot{q}_\nu} Q_{0\nu} + \frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial u_\rho}\dot{u}_\rho + \frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial t} \tag{3.2.17}$$

$$(\nu = 1,2,\cdots,n;\rho = 1,2,\cdots,r;j = 1,2,\cdots,m)$$

规划运动方程式(3.2.8)和式(3.2.14),在一般情形下,包含n个任意函数Φ_μ, Q_s^τ和$\Phi_\mu^*, U_s^\tau(\mu = 1,2,\cdots,m;s = m+1,\cdots,n)$。进而,假设这些函数满足相应方程式(3.2.8)和式(3.2.14)解的存在和唯一条件。如果开始时刻相应的示点$M(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$在积分流形$\Omega$上,那么所论质点系的运动按给定的规划式(3.2.2)发生。此时,在式(3.2.8)中有$\Phi_\mu = 0$,在式(3.2.14)中有$\Phi_\mu^* = 0(\mu = 1,2,\cdots,m)$,而其余任意函数可借助加在示点沿积分流形运动的补充条件(如优化条件)来预先确定。

2. 规划稳定性

现在假设示点开始时在积分流形Ω外,在足够小的领域Ω_ε上。这是更自然的假设,上面指出的任意函数仍有选择余地,可用于保证所论质点系规划运动的稳定性。为此,取规划运动式(3.2.2)作为未扰运动。此时,以不同于规划运动的状态和速度开始的系统所有可能运动就是系统的扰动运动。在对确定规划运动式(3.2.2)的函数$\omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\mu = 1,2,\cdots,m)$本身值的关系上,

将这些运动与未扰运动作比较。此时,规划运动对于这些函数的稳定性问题,实际上就是在函数 $\omega_\mu(\mu=1,2,\cdots,m)$ 有异于零的初始偏离时积分流形 Ω 的稳定性问题。在用补充控制力规划情形以及在用系统参数规划情形,相应的扰动运动方程可写成

$$\dot{\omega}_\mu=\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\quad(\mu=1,2,\cdots,m)\tag{3.2.18}$$

根据加在函数 $\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 上的条件,方程式(3.2.18)有平凡解 $\omega_1=0,\cdots,\omega_m=0$,这就是给定的积分流形 Ω,并对应所论质点系未扰的规划运动。因此,为得到规划运动对于表示某些品质指标的函数 $\omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 的待求稳定(渐近稳定)条件,只要选函数 $\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\mu=1,2,\cdots,m)$ 使得方程组(3.2.18)的平凡解是稳定的(渐近稳定的)。为得到相应的稳定条件,可应用特征函数法或 Ляпунов 函数法。在一般情形,当控制系统运动考虑到运动性质对规划的偏离,或考虑系统本身状态时,通常应用 Ляпунов 函数法。假设构造某函数 $V(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},,t)$,它在某域

$$\sum_{\mu=1}^{m}\omega_\mu^2\leqslant H,\quad G\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\}\times T\{t\geqslant t_0\}\tag{3.2.19}$$

上对 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 是正定的。按所组成的方程式(3.2.8)和扰动运动方程式(3.2.18),求此函数对时间的导数 $\dot{V}$,有

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial\omega_\mu}\Phi_\mu+\frac{\partial V}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu+\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_\nu}Q_\nu+\frac{\partial V}{\partial t}\quad(\mu=1,2,\cdots,m;\nu=1,2,\cdots,n)\tag{3.2.20}$$

这个导数在域(式(3.2.19))上对 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 为常负(或恒等于零)的条件就是规划运动式(3.2.2)的待求稳定条件。对待求函数 $\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\mu=1,2,\cdots,m)$ 以及 $Q_s^r(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(s=m+1,m+2,\cdots,n)$ 来说,这些条件乃是原始条件。Ляпунов 函数 V 可用下述二次型组成

$$V=\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}B(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\boldsymbol{\omega}\tag{3.2.21}$$

式中:$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{colon}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$ 的转置。如果带有界连续元

的 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 在域 $G\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\} \times T\{t \geqslant t_0\}$ 上满足 Sylvester 条件，则式(3.2.21)是正定的。

上述所得稳定性条件的方法，当控制仅按运动性质对规划性质的偏离而组成，而未定函数 Φ_μ 选为形式 $\Phi_\mu = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},t)$ 或形式 $\Phi_\mu = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega})\ (\mu = 1,2,\cdots,m)$ 时，尚可简化。此时，扰动运动方程分别写成

$$\dot{\omega}_\mu = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},t) \quad (\mu = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.22}$$

和

$$\dot{\omega}_\mu = \Phi_\mu(\boldsymbol{\omega}) \quad (\mu = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.23}$$

由此得知，在此情形下稳定性条件仅仅加在函数 $\Phi_\mu(\mu = 1,2,\cdots,m)$ 上，不依赖于其余未定函数 $Q^\tau_{m+1},\cdots,Q^\tau_n$。因为在方程式(3.2.22)和式(3.2.23)中没有广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 和广义速度 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n$，稳定性条件得以简化，可直接应用3.1节中构造稳定系统理论的稳定性条件。例如，特征数法在此情形非常有效。相应的扰动运动方程有

$$\dot{\omega}_s = p_{sk}\omega_k + \Phi_s^{(2)} \quad (s,k = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.24}$$

式中：$p_{sk} = p_{sk}(t)$ 为待求函数 $\Phi_s(\boldsymbol{\omega},t)$ 按 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 幂展开式的线性项系数，它们在所有 $t \geqslant t_0$ 是有界的、连续的；$\Phi_s^{(2)} = \Phi_s^{(2)}(\boldsymbol{\omega},t)$ 为高阶项。此时，待求函数 Φ_s 可这样组成：使一次近似扰动方程

$$\dot{\omega}_s = p_{sk}\omega_k \quad (s,k = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.25}$$

组成规划组并使方程组解的特征数为正的。此时，规划运动对给定性质式(3.2.2)来说是渐近稳定的。如果函数 Φ_s 的线性项系数是常数，那么，为使规划运动是渐近稳定的，只要特征方程

$$\det(-1)^m(p_{sk} - \delta_{sk}\lambda)_{m\times m} = 0 \tag{3.2.26}$$

的所有特征根分布在根平面虚轴的左半部。

在系统规划用控制装置来实现的情形，上述讨论也成立。只

需注意，在此情形出现于方程式(3.2.14)中的未定函数 $\Phi_\mu^*(\boldsymbol{\omega},\dot{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\mu=1,2,\cdots,m)$ 以及 $U_s^\tau(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(s=m+1,m+2,\cdots,n)$ 预先确定使扰动运动方程

$$\ddot{\omega}_\mu = \Phi_\mu^*(\boldsymbol{\omega},\dot{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \quad (\mu = 1,2,\cdots,m) \quad (3.2.27)$$

的平凡解 $\omega_1=0,\cdots,\omega_m=0$ 是稳定的(渐近稳定的)。

通常，在一般情形，所得规划稳定的条件只能确定运动方程中的一部分任意函数。此时，其余的任意函数由补充要求确定[1]。这些要求可以是：对应于示点向积分流形或沿积分流形运动在某种意义上的最优要求，以给定的精度实现规划的条件，参数改变和控制力的各种限制，以及在构造规划运动系统本身时所提出的一般技术要求等。

规划运动的实例见第5章。

3.2.3 在规划运动中取驻值的泛函的构造

在构造规划运动系统问题中要研究确定积分泛函的集合问题，这些积分泛函在质点系规划运动中取驻值。在分析力学中是作为建立力学变分原理问题提出并解决的，在质点系运动的控制理论中也研究泛函的确定，使得在选取的控制函数下取最优，并且总假定系统运动方程事先已知。如果运动方程事先未给出，运动方程可由规划运动存在条件出发，按系统给定的运动规律或按给定的运动性质来组成。因此，构造驻定泛函的问题也是动力学逆问题的一种可能变化。

1. 问题的提出

研究一质点系，其运动微分方程表示为

$$a_{\nu i}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},,t)\ddot{q}_i = f_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \quad (\nu,i = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.28}$$

式中：q_i 为广义坐标；$a_{\nu i}$、f_ν 是在 $t\geqslant t_0$ 时某域 $G\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\}$ 上有界连续函数并对所有变量 $\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、t 可微；f_ν 为广义力。假设系统运动的规

划，由在规划运动中广义坐标的变化规律

$$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t) \tag{3.2.29}$$

组成，或者表示为规划运动性质的某个总合，由以下等式描述，即

$$\Omega:\omega_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0\quad(\nu=1,2,\cdots,n) \tag{3.2.30}$$

式中：$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$是在$t\geqslant t_0$二次可微的；函数$\omega_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$在$t\geqslant t_0$时在域$G\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\}$上彼此独立且对所有变量可微。提出如下逆问题[1]：确定广义力$f_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\nu=1,2,\cdots,n)$，在这些力作用下由函数式(3.2.29)或等式(3.2.30)给出的系统的规划运动是可能的，并且组成的泛函

$$J[\boldsymbol{q}]=\int_{t_0}^{t}F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\mathrm{d}t \tag{3.2.31}$$

在系统可能（包括规划的）运动上取驻值。

在此假设，被积函数$F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$在$t\geqslant t_0$时在域$G\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\}$上是有界、连续的，并对所有变量存在直至三阶的偏导数。这个问题乃是完成给定规划运动的质点系解析构造的原始问题，其解可确定系统本身的参数，以及控制元，同时可事先建立系统可能运动的某些品质指标。所提问题的解归结为按给定的特解式(3.2.29)或按给定的积分流形式(3.2.30)来建立微分方程式(3.2.28)，并建立相应的泛函式(3.2.31)，其在所建立的方程式(3.2.28)的解上取驻值。因为对所论类型，微分方程理论和变分学的逆问题有非单一解，那么为最终确定方程式(3.2.28)的右端部分和相应泛函式(3.2.31)的结构，尚需有补充条件。给定运动，即特解式(3.2.29)或方程的特殊积分式(3.2.30)，在有初始扰动时的稳定性要求，可作为一个补充条件。在一般情形，系统运动的规划有条件地由某些未定函数$\varphi_\nu(t),\omega_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\nu=1,2,\cdots,n)$的总合给出。在构造泛函式(3.2.31)时以及组成稳定性条件时，对这些函数应施加某些限制。这些限制用于分出质点系可能规划运动的集合。

2. 按规划运动的给定规律求解

假设给定质点系在规划运动中坐标的变化规律

$$\Omega: q_\nu = \varphi_\nu(t) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.32}$$

使给定函数式(3.2.32)是特解的微分方程组的集合应有形式,即

$$\ddot{q}_\nu = \ddot{\varphi}_\nu(t) + \Phi_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.33}$$

式中:$\Phi_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$代表广义力分量$f_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\nu=1,2,\cdots,n)$,在这些力作用下系统给定运动式(3.2.32)是可能的。由前述对广义力的假设,这些函数满足条件

$$\Phi_\nu(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),t)=0 \quad (\nu=1,2,\cdots,n)$$

但仍然是任意的。

为确定这些未定函数,现在给出一些限制。这些限制首先在建立泛函

$$J[\boldsymbol{q}] = \int_{t_0}^{t} F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\varphi(t),t)\,\mathrm{d}t \tag{3.2.34}$$

时发生,此泛函满足对被积函数本身所作的假设,并且在方程组(3.2.33)的解上,包括在给定运动规划式(3.2.32)上取驻值。实际上,对应泛函式(3.2.34)的可能极值方程有如下形式,即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_\nu \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_\nu \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_\nu \partial t} = \frac{\partial F}{\partial q_\nu} \quad (\nu,i = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.35}$$

将这些方程与所要建立的方程式(3.2.33)相比较,得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_\nu \partial \dot{q}_i} = 0 \quad (\nu,i = 1,2,\cdots,n;\nu \neq i) \tag{3.2.36}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_\nu \partial q_i} = 0 \quad (\nu,i = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.37}$$

$$(\ddot{\varphi}_\nu(t) + \Phi_\nu)\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_\nu^2} = \frac{\partial F}{\partial q_\nu} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_\nu \partial t} \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.38}$$

所得等式可作为构造泛函式(3.2.34)的方程来研究。由此得知，待求泛函的被积函数表示为以下和式，即

$$F = F_0(\boldsymbol{q},t) + \sum_{j=1}^{n} F_j(\dot{q}_j,t) \tag{3.2.39}$$

其中 F_0 和 F_j 满足条件

$$(\ddot{\varphi}_\nu(t) + \Phi_\nu)\frac{\partial^2 F_\nu}{\partial \dot{q}_\nu^2} = \frac{\partial F_0}{\partial q_\nu} - \frac{\partial^2 F_\nu}{\partial \dot{q}_\nu \partial t} \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.40}$$

运动方程式(3.2.33)解的存在唯一条件，以及存在满足条件式(3.2.40)的函数 $F_0(\boldsymbol{q},t)$ 和 $F_j(\dot{q}_j,t)(j=1,2,\cdots,n)$ 的要求，其实是加在任意函数 $\Phi_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)(\nu=1,2,\cdots,n)$ 上的确定的限制。

在有坐标的初始扰动下建立规划运动对广义坐标的稳定性条件时，便可确定对这些函数的一组限制。为得到这些限制，首先要建立相应的扰动方程，有

$$\ddot{x}_\nu = \Phi_\nu(\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}, t) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.41}$$

其中 $x_\nu = q_\nu - \varphi_\nu(t)(\nu=1,2,\cdots,n)$ 是广义坐标的扰动。进而，利用稳定性的相应判据，确定方程组(3.2.41)平凡解 $x_1=0,\cdots,x_n=0$ 的待求稳定性条件。此时，所得条件就是为建立所要组成的方程式(3.2.33)右端最终结构所加的限制。

综上讨论可得如下结论：带给定的稳定的特解式(3.2.32)的方程组有形式式(3.2.33)，其中函数 $\Phi_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 应如此选择，以使方程式(3.2.41)的平凡解是稳定的，此时泛函

$$J[\boldsymbol{q}] = \int_{t_0}^{t}[F_0(\boldsymbol{q},t) + \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(\dot{q}_\nu,t)]\mathrm{d}t \tag{3.2.42}$$

在所建立方程组(3.2.33)的解上取驻值，而函数 $F_0(\boldsymbol{q},t)$ 和 $F_\nu(\dot{q}_\nu,t)$ 满足条件式(3.2.40)。

研究一个特殊情形，此时所得结论可指出方程组(3.2.33)的

更确切的结构，即要求在这些方程的解上泛函

$$J[\boldsymbol{q}] = \int_{t_0}^{t}\left[F_0(\boldsymbol{q},t) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\dot{q}_\nu^2\right]\mathrm{d}t \tag{3.2.43}$$

取驻值。此情形对应方程式(3.2.36)～式(3.2.38)在$\partial^2 F/\partial \dot{q}_\nu^2 = 1(\nu=1,2,\cdots,n)$下的解。此时，方程式(3.2.40)成为

$$\frac{\partial F_0}{\partial q_\nu} = \Phi_\nu + \ddot{\varphi}_\nu(t) \quad (\nu=1,2,\cdots,n) \tag{3.2.44}$$

由此得知，函数 Φ_ν 可取

$$\Phi_\nu = \frac{\partial U}{\partial q_\nu} \quad (\nu=1,2,\cdots,n) \tag{3.2.45}$$

其中 U 为变量 $q_1,\cdots,q_n,t$ 的某函数。因此，在所论情形，带给定特解式(3.2.32)的方程组(3.2.33)可取

$$\ddot{q}_\nu = \ddot{\varphi}_\nu(t) + \frac{\partial U(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_\nu} \tag{3.2.46}$$

其中函数 $U(\boldsymbol{q},t)$ 应如此选择，以使所建立的方程式(3.2.46)的解存在唯一条件满足，并使

$$\left.\frac{\partial U(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_\nu}\right|_{q=\varphi(t)} = 0 \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.47}$$

此时，泛函

$$J[\boldsymbol{q}] = \int_{t_0}^{t}\left[U(\boldsymbol{q},t) + \sum_{\nu=1}^{n}\ddot{\varphi}_\nu(t)q_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\dot{q}_\nu^2\right]\mathrm{d}t \tag{3.2.48}$$

在方程解上取驻值。方程式(3.2.46)乃是力函数为

$$U(\boldsymbol{q},t) + \sum_{\nu=1}^{n}\ddot{\varphi}_\nu(t)q_\nu$$

的力作用下质点系的运动方程，而泛函式(3.2.48)是Hamilton意义下的作用量。为确定规划运动式(3.2.32)的稳定性条件，组成相应的扰动方程

$$\ddot{x}_\nu = \left.\frac{\partial U(\boldsymbol{q},t)}{\partial t}\right|_{q=\varphi(t)+x} \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.49}$$

进而，假设此方程右端仅依赖于扰动 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，在某域 $H\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H\right\}$ 上是全纯函数。将这些函数按扰动的幂分解，由对 U 的已选假定式(3.2.47)，它们从不依赖于一次项开始。此时，扰动运动方程式(3.2.49)乃是某力学系统靠近平衡位置 $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$ 在有势力作用下的方程组，因此加在函数 U 上的稳定条件，可按关于平衡位置稳定性的 Lagrange 定理来确定。这样，如果函数 U 写成

$$U = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_n=m} a^{(m_1,m_2,\cdots,m_n)}(q_1 - \varphi_1(t))^{m_1}\cdots$$

$$(q_n - \varphi_n(t))^{m_n} + \tilde{U}(q - \varphi(t))$$

式中：m 为某异于零的偶数，而和对不超过 m 的所有偶数 m_i 来取；$\tilde{U}(q-\varphi(t))$ 为包含 $q_\nu - \varphi_\nu(t)\ (\nu = 1, 2, \cdots, n)$ 的高于 m 阶的项，那么常系数 $a^{(m_1,m_2,\cdots,m_n)}$ 的负性(某些可能为零)就是相应规划运动式(3.2.32)的稳定性条件。

3. 按给定规划运动性质求解

假设质点系规划运动的性质由以下表达式描述，即

$$\Omega: \omega_\nu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3.2.50)$$

其中 $\omega_\nu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ 为 $t \geqslant t_0$ 时某域 $G\{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\}$ 上独立、有界、连续且对所有变量 $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t$ 的可微函数。使运动给定性质式(3.2.50)为特殊积分总合的微分方程组的集合可取

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial t} = \Phi_\nu(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \quad (\nu, i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3.2.51)$$

其中尚未确定的函数 $\Phi_\nu(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ 乃是广义力的分量 $f_\nu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\ (\nu = 1, 2, \cdots, n)$，在这些广义力作用下带给定性质式(3.2.50)的运动是可能的，并满足对广义力的假设以及条件

$$\Phi_\nu(0, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

要求所建立的方程式(3.2.51)是泛函

$$J[\boldsymbol{q}] = \int_{t_0}^{t} F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\omega},t)\,\mathrm{d}t \qquad (3.2.52)$$

的可能极值方程。

将方程式(3.2.51)与对泛函式(3.2.52)相应的 Euler - Lagrange 方程相比较,得到

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\nu} = \omega_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \qquad (3.2.53)$$

$$\Phi_\nu = \frac{\partial F}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \qquad (3.2.54)$$

进而,假设给定的积分式(3.2.50)满足条件

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_\nu} \quad (i,\nu = 1,2,\cdots,n) \qquad (3.2.55)$$

此时,表达式(3.2.53)允许按给定的特殊积分式(3.2.50)建立函数 $F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\omega},t)$,据式(3.2.54)此函数确定待求方程式(3.2.51)的右端。这样,带给定特殊积分的方程组(3.2.51)可表示为

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial t} = \frac{\partial F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\omega},t)}{\partial q_\nu} \quad (i,\nu = 1,2,\cdots,n) \qquad (3.2.56)$$

其中函数 $F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\omega},t)$ 应满足方程组(3.2.56)解的存在唯一条件,且

$$\left.\frac{\partial F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\omega},t)}{\partial q_\nu}\right|_{\omega=0} = 0 \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \qquad (3.2.57)$$

此时,在方程式(3.2.56)的解上,泛函式(3.2.52)取驻值。

为得到给定规划运动式(3.2.50)的稳定性条件,组成对函数 $\omega_\nu(\nu = 1,2,\cdots,n)$ 的扰动方程。假设这些扰动由它对零的初始 $(t = t_0)$ 的扰动所引起。由式(3.2.56)可知,这些方程有如下形式,即

$$\dot{\omega}_\nu = \frac{\partial F(q,\dot{q},\omega,t)}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.58}$$

并且按条件式(3.2.57)有平凡解 $\omega_\nu = 0(\nu = 1,2,\cdots,n)$。将给定的规划运动性质式(3.2.50)解释为相空间 $\{q,\dot{q}\}$ 中的动超曲面，假设这些曲面在所有 $t \geqslant t_0$ 的某有限域 $G_1\{q,\dot{q}\} \subset G\{q,\dot{q}\}$ 上始终存在。此时，所有 $t \geqslant t_0$ 在包括 $G_1\{q,\dot{q}\}$ 的某有限域 $G_2\{q,\dot{q}\} \subset G\{q,\dot{q}\}$ 上，要求满足不等式

$$\frac{\partial F(q,\dot{q},\omega,t)}{\partial q_\nu}\omega_\nu(q,\dot{q},t) \leqslant 0 \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.59}$$

这个不等式就是规划运动在下述意义下稳定性的充分条件：对无论多么小的数 ε，总可以找到这样的数 δ，使在所有初始扰动 ω_ν 下，只要

$$\sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^2(q_0,\dot{q}_0,t) \leqslant \delta$$

那么，在以后对 $t \geqslant t_0$ 成立不等式

$$\sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^2(q,\dot{q},t) \leqslant \varepsilon$$

现在研究一个特殊情形。此时，规划运动由式

$$\omega_\nu(q,t) = 0 \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.60}$$

给出，待求微分方程组的集合可写成

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial t} = \Phi_\nu(\omega,q,t) \quad (\nu,i = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.61}$$

这里 $\Phi_\nu(\omega,q,t)$ 为满足条件

$$\Phi_\nu(0,q,t) = 0$$

的某些尚未确定的函数。要求方程式(3.2.61)是泛函式(3.2.52)

的可能极值方程，得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial \dot{q}_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_\nu} = \omega_\nu(\boldsymbol{q},t),$$

$$\Phi_\nu = \frac{\partial F}{\partial q_\nu} \quad (i,\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.62}$$

由此得知，泛函式(3.2.52)应取

$$J[\boldsymbol{q}] = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \omega_i(\boldsymbol{q},t)\,\mathrm{d}t \tag{3.2.63}$$

而方程式(3.2.61)的右端应为

$$\Phi_\nu = \dot{q}_i \frac{\partial \omega_i(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.64}$$

它们在这些方程的给定特殊积分式(3.2.60)上变为零。规划运动对给定性质式(3.2.60)的稳定性满足不等式

$$\dot{q}_i \frac{\partial \omega_i(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_\nu} \omega_\nu(\boldsymbol{q},t) \leqslant 0 \quad (i,\nu = 1,2,\cdots,n) \tag{3.2.65}$$

它在所有 $t \geqslant t_0$，在包括积分式(3.2.60)的域 $G_1\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\}$ 的相空间 $\{\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\}$ 的某有限域 $G_2 \subset G$ 上成立。

关于规划运动的例子详见第5章。

3.3 非完整运动规划

考虑汽车靠位问题。可以仅仅向前或向后驱动，并且向左或向右转舵。然而，可联用驱动和转舵使汽车运动到停车位置。令人惊讶的是，一个下落的猫利用有趣的联合操纵，总能用腿着地。汽车靠位策略和下落猫策略表面上看似乎没有联系，然而，从力学角度和数学角度上看，它们正是非完整运动规划问题的两个例子。

非完整运动规划问题涉及机器人系统的路径规划，它们遵从

非完整约束或不可积守恒律。一个非完整约束，例如，平行靠位时滚动接触约束，是对系统速度的限制，它不能被积分为位置约束。如果能，就叫完整约束了。类似地，一个不可积分守恒律，如下落猫情形中的动量矩守恒律，是一物理定律，它也约束了系统的速度。可将这两个范畴归为一起。非完整约束经常出现在日常生活中。事实上，它们比完整约束更为一般。一个完整约束限制系统离开位形空间的某域，与完整约束不同，非完整约束仅限制运动的自由。遵从滚动接触约束的平行靠位情形，作为一个理想的说明性例子。首先，如果汽车可以运动到人行道上，那么，不经心的错误可导致事故。第二，有了足够的关于约束的知识，人们就能主动地克服或操纵约束从一个位形运动到另一个位形。下落猫的运动作为另一说明性例子。

通常的运动规划问题已有很长历史，但对非完整运动规划的研究还是近年的事情。主要由下述问题的研究所推动。

(1)杂乱环境中行走的移动机器人。

(2)在被抓对象曲面上滚动的多指手。

(3)空间机器人。

(4)超声电机。

在非完整运动规划和结构非线性控制之间联系的研究方面主要有以下几点。

(1)非完整运动规划在系统规划/控制中的多方面应用，如赘余机器人、空间基机器人，甚至单腿跳虫。

(2)非线性最优控制的经典与现代工具的应用。

(3)微分几何方法和经典力学用于表征非完整运动规划的解。

(4)用于计算非完整运动规划的无碰路径的新算法。

参考文献[2]主要涉及三个方面。

(1)可控性。

(2)移动机器人的规划运动。

(3)下落猫、空间机器人和规范理论。

参考文献

[1] Галиуллин А С. Методы Решения Обратных Задач Динамики. Москва: Наука, 1986.

[2] Li Z X, Canny J F. Nonholonomic Motion Planning. Boston: Klumer Academic Publishers, 1993.

[3] Ляпунов А М. Общая задача об устойчивости движения. Собр Соч Т Ⅱ Москва: ИздАНСССР, 1956.

[4] Четаев Н Г. Устойчивость Движения. 3－е изд, Москва: Гостехиздат, 1965.

[5] Малкин И Г. Теория Устойчивости Движения. Москва: Наука, 1966.

[6] 秦元勋，王慕秋，王联．运动稳定性理论与应用．北京：科学出版社，1981.

[7] 高为炳．运动稳定性基础．北京：高等教育出版社，1987.

[8] 廖晓昕．稳定性的数学理论及应用．武汉：华中师范大学出版社，1988.

[9] 舒仲周．运动稳定性．成都：西南交通大学出版社，1989.

[10] 陆启韶．常微分方程的定性方法和分叉．北京：北京航空航天大学出版社，1989.

[11] 王照林．运动稳定性及其应用．北京：高等教育出版社，1992.

[12] 黄琳．稳定性理论．北京：北京大学出版社，1992.

[13] 梅凤翔，等．约束力学系统的运动稳定性．北京：北京理工大学出版社，1997.

第4章　刚体动力学中的逆问题

重刚体绕固定点运动问题是理论力学中最激起好奇心的问题之一，寻求刚体动力学问题的精确解乃是分析力学的精华。1758年Euler建立了刚体动力学方程并给出刚体动力学的一般提法。从1758年至1959年，这200年间得到了刚体绕定点转动问题的12种解，其中3种为通解，9种为特解。各种解的发现没有一般方法，主要靠研究者的技巧，并且在很大程度上带有偶然性[1]。刚体动力学的新成就是20世纪后半期以苏联Харламов为首的一批学者的贡献。根据已知积分将原始方程组降阶的问题很早就提出来了，但著名的方法归结为异常笨重的而因此实际上不实用的方程。Харламов放弃传统的主轴，引入所谓专门坐标轴，新选取的基本变量在此坐标轴中以自然方式建立，因此降阶基本完成。所得到的Харламов方程是两个一阶方程[2]。在对质量分布的一个限制下，Харламов将问题归结为一个积分—微分方程。

本章研究重刚体绕定点运动的动力学逆问题，包括Euler-Poisson方程及3种经典可积情形，重刚体定点运动动力学逆问题，刚体运动方程的封闭，刚体运动方程的修改，以及势力场中Hess运动的条件等。

4.1　Euler-Poisson方程及三种经典可积情形

本节给出刚体在重力作用下绕固定点O转动的Euler动力学方程和Poisson方程，Euler-Poisson方程的三个第一积分，以及三种经典可积情形等。

4.1.1 Euler-Poisson 方程

设刚体总质量为 M，刚体质心在与刚体相固联的轴系中的坐标为 x_c, y_c, z_c，铅垂向上的单位矢量在动系上的投影为 $\gamma, \gamma', \gamma''$。假设动系轴为刚体对点 O 的惯性主轴，惯性主矩为 A, B, C。刚体角速度在动系上的投影为 p, q, r。Euler 动力学方程为

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + (C - B)qr = Mg(z_c\gamma' - y_c\gamma'') \\
&B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + (A - C)rp = Mg(x_c\gamma'' - z_c\gamma) \\
&C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + (B - A)pq = Mg(y_c\gamma - x_c\gamma')
\end{aligned} \tag{4.1.1}
$$

在 Euler 动力学方程式(4.1.1)中出现时间 t 的六个未知函数 $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 以及表征刚体质量分布的六个常数 A, B, C, x_c, y_c, z_c。为求得这六个未知函数，需再补充三个方程。由铅垂向上单位矢量的端点速度在固定坐标系中等于零，得到

$$
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = r\gamma' - q\gamma'', \frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}t} = p\gamma'' - r\gamma, \frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}t} = q\gamma - p\gamma' \tag{4.1.2}
$$

这就是 Poisson 方程。

对六个未知函数 $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 的六个非线性微分方程式(4.1.1)和式(4.1.2)称为 Euler-Poisson 方程。

4.1.2 Euler-Poisson 方程的三个第一积分

现将 Euler-Poisson 方程式(4.1.1)和式(4.1.2)写成

$$
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = P, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = Q, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = R, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \Gamma, \frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}t} = \Gamma', \frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}t} = \Gamma'' \tag{4.1.3}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
P &= \{Mg(z_c\gamma' - y_c\gamma'') - (C - B)qr\}A^{-1} \\
Q &= \{Mg(x_c\gamma'' - z_c\gamma) - (A - C)rp\}B^{-1} \\
R &= \{Mg(y_c\gamma - x_c\gamma') - (B - A)pq\}C^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.1.4}
$$

$$
\Gamma = r\gamma' - q\gamma'', \Gamma' = p\gamma'' - r\gamma, \Gamma'' = q\gamma - p\gamma'
$$

方程式(4.1.3)还可写成

$$
\frac{\mathrm{d}p}{P} = \frac{\mathrm{d}q}{Q} = \frac{\mathrm{d}r}{R} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\Gamma} = \frac{\mathrm{d}\gamma'}{\Gamma'} = \frac{\mathrm{d}\gamma''}{\Gamma''} = \mathrm{d}t \tag{4.1.5}
$$

为解方程式(4.1.1)和式(4.1.2),需要知道六个独立的第一积分。但是,由关系式(4.1.4)可知,$P,Q,R,\Gamma,\Gamma',\Gamma''$不显含时间$t$,因此只需求得不含$t$的五个第一积分就够了。进而,因为1是Euler-Poisson方程的最后乘子,据Jacobi定理,只要知道四个第一积分就够了[1,3]。

Euler-Poisson方程有三个不含时间的独立的第一积分。

(1)能量积分。将六个方程式(4.1.1)、式(4.1.2)两端分别乘以p,q,r和Mgx_c,Mgy_c,Mgz_c然后相加,并积分得

$$
Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg(x_c\gamma + y_c\gamma' + z_c\gamma'') = c_1 = 2h \tag{4.1.6}
$$

(2)面积积分。将六个方程式(4.1.1)和式(4.1.2)两端分别乘以γ,γ',γ''和Ap,Bq,Cr,然后相加,并积分得

$$
Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = c_2 \tag{4.1.7}
$$

(3)平凡积分(几何积分),即

$$
\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = c_3 = 1 \tag{4.1.8}
$$

有了这三个经典第一积分,刚体绕定点转动问题的解归结为寻求第四个积分。

4.1.3 Euler-Poisson 方程的三种经典可积情形

需补充的第四个第一积分,虽经众多数学家的努力,但在一般情形下尚未找到。在对刚体质量分布的限制下,即对常数 A,B,C,x_c,y_c,z_c 的限制下,补充的第一积分仅在下列三种情形中求得。

(1) Euler 情形。在 Euler 情形,有

$$x_c = y_c = z_c = 0 \tag{4.1.9}$$

即质心在固定点上,此时 Euler 动力学方程式(4.1.1)有如下形式,即

$$\begin{aligned} A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + (C - B)qr &= 0 \\ B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + (A - C)rp &= 0 \\ C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + (B - A)pq &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

将方程式(4.1.10)两端分别乘以 Ap、Bq 和 Cr,然后相加并积分,得到第四个积分,即

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = c_4 \tag{4.1.11}$$

(2) Lagrange 情形。在 Lagrange 情形,有

$$A = B, x_c = y_c = 0 \tag{4.1.12}$$

在此情形,方程式(4.1.1)的最后一个形式,有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$$

而第四个积分为

$$r = c_4 \tag{4.1.13}$$

(3) Ковалевская 情形。在 Ковалевская 情形,有

$$A = B = 2C, y_c = z_c = 0 \tag{4.1.14}$$

此时,Euler-Poisson 方程有补充的第一积分

$$(p^2 - q^2 - c\gamma)^2 + (2pq - c\gamma')^2 = c_4 \qquad (4.1.15)$$

其中

$$c = \frac{Mgx_c}{C}$$

以上三种情形，问题归结为求积分。在前两种情形中，Euler-Poisson 方程的通解表示为时间的椭圆函数，而在第三种情形表示为时间的超椭圆函数。

如果不仅对质量分布加以限制，而且对运动的初始条件也加以限制，则找到的解为特解。从 1890 年到 1959 年，人们总共找到九种特解，即 Hess 情形（1890 年）、Бобылев－Стеклов 情形（1896 年）、Стеклов 情形（1899 年）、Горячев 情形（1899 年）、Чаплыгин 情形（1904 年）、Kowalewski 情形（1908 年）、Горячев－Чаплыгин 情形（1900 年）、Grioli 情形（1947 年）、Харламова 情形（1959 年）。

刚体动力学正问题就是从 Euler-Poisson 方程出发来求得运动性质以及最终的解，问题归结为寻求第四个积分。

4.2　重刚体定点运动的动力学逆问题

在一般情形下，刚体运动性质作为第四个积分（或特殊积分）来给定，按所有积分流形来组建相应的动力学方程。因为此时相应的运动学方程是已知的，即 Poisson 方程式（4.1.2），因此，建立运动方程的问题乃是用 Euler 动力学方程式（4.1.1）来封闭运动学方程的问题。进而，由所建立的方程得到加在刚体质量几何上的充要条件，使得运动方程具有给定的积分。由这些条件可得到刚体定点运动方程存在代数积分的已知经典情形以及某些特殊可积情形。

4.2.1　问题的提出

为讨论方便起见，取记号

$$x_1 = p, x_2 = q, x_3 = r, x_4 = \gamma, x_5 = \gamma', x_6 = \gamma''$$

现在提出刚体定点运动的下述动力学逆问题[4]。

试建立 Euler 动力学方程

$$\dot{x}_s = f_s(x_1, \cdots, x_6) \quad (s = 1,2,3) \tag{4.2.1}$$

根据下述第一积分

$$\Omega: \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{2}(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2) + Mg(x_c x_4 + y_c x_5 + z_c x_6) = c_1 \\ \omega_2 = Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 = c_2 \\ \omega_3 = \omega_3(x_1, \cdots, x_6) = c_3 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

以及 Poisson 方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= x_3x_5 - x_2x_6 = f_4 \\ \dot{x}_5 &= x_1x_6 - x_3x_4 = f_5 \\ \dot{x}_6 &= x_2x_4 - x_1x_5 = f_6 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

使得 Euler-Poisson 方程式(4.2.1)、式(4.2.3)的第一积分

$$\omega_0 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1$$

$$\omega_i(x_1, x_2, \cdots, x_6) = c_i \quad (i = 1,2,3) \tag{4.2.4}$$

是独立的,且相容的。

所提问题是不完全微分方程组(4.2.3)按给定积分流形式(4.2.2)来封闭的问题。为解此问题,据第1章给出的方法,要组成使给定表达式(4.2.2)(计入 $c_3 = 0$ 的情形)是方程组(4.2.1)和式(4.2.3)的积分的充要条件。将式(4.2.2)对时间求导数,得到关于 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_6$ 的代数方程,再将式(4.2.3)代入消去 $\dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6$,便得到关于 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ 的三个代数方程,解此方程,便得到待求 Euler 动力学方程组[4],即

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\Delta}[(G \cdot f)(Cx_3\delta_2 - Bx_2\delta_3) - BC(\bar{\delta} \cdot f)f_4 +$$

$$Mg(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{f})(Bx_5\delta_3 - Cx_6\delta_2)] + \Phi_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\Delta}[(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{f})(Ax_1\delta_3 - Cx_3\delta_1) - CA(\bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \boldsymbol{f})f_5 +$$

$$Mg(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{f})(Cx_6\delta_1 - Ax_4\delta_3)] + \Phi_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\Delta}[(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{f})(Bx_2\delta_1 - Ax_1\delta_2) - AB(\bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \boldsymbol{f})f_6 +$$

$$Mg(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{f})(Ax_4\delta_2 - Bx_5\delta_1)] + \Phi_3 \qquad (4.2.5)$$

式中:$\boldsymbol{G}(Ax_1, Bx_2, Cx_3)$ 是刚体对定点 O 的动量矩;当 c_3 为任意常数($c_3 \neq 0$) 时,$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$;当 $c_3 = 0$ 时,$\Phi_1 = BC\Phi f_4$, $\Phi_2 = CA\Phi f_5$, $\Phi_3 = AB\Phi f_6$,而 $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_6)$ 为满足条件 $\Phi|_{\omega_3=0} = 0$ 的任意函数;$\Delta = BC\delta_1 f_4 + CA\delta_2 f_5 + AB\delta_3 f_6 \neq 0$;$\boldsymbol{f}(f_4, f_5, f_6) = \boldsymbol{\varsigma}_0 \times \boldsymbol{\omega}$;$\boldsymbol{\varsigma}_0(x_4, x_5, x_6)$ 为铅垂单位矢量;$\bar{\boldsymbol{\delta}}(\delta_4, \delta_5, \delta_6)$,$\delta_s = \dfrac{\partial \omega_s}{\partial x_s}(s = 1, 2, \cdots, 6)$。

由方程式(4.2.5) 可直接得到 Euler 情形、Lagrange 情形、Ковалевская 情形的已知动力学方程。

将 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 作为示点 M 在给定积分流形式(4.2.2) 上的坐标来研究,要求所建立的方程式(4.2.5) 与重刚体绕定点运动的已知 Euler 动力学方程相等,此时考虑到在积分流形 Ω 上有 $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$,得到

$$\begin{aligned} &(B - C)x_2x_3 + Mg(z_cx_5 - y_cx_6) = A\varphi_1 \\ &(C - A)x_3x_1 + Mg(x_cx_6 - z_cx_4) = B\varphi_2 \qquad (4.2.6) \\ &(A - B)x_1x_2 + Mg(y_cx_4 - x_cx_5) = C\varphi_3 \end{aligned}$$

式中:$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 为方程式(4.2.5) 无 Φ_1, Φ_2, Φ_3 时的右端部分。等式(4.2.6) 就是刚体定点运动的动力学方程式(4.2.1) 和运动学方程式(4.2.3) 存在形如式(4.2.2) 的第一积分的充要条件,并作为解下述问题的原始方程。

确定加在刚体质量几何(A, B, C, x_c, y_c, z_c) 和刚体运动的动力学指标(完整约束、非完整约束、伺服约束) 上的条件,当这些条件

满足时,方程组(4.2.1)、式(4.2.3)的给定第一积分式(4.2.2)成立。

此外,等式(4.2.6)还可用于解其他问题,例如,在给定的第一积分和给定的刚体质量几何的限制下,来确定必要的约束,以及在给定的加在刚体上的约束和给定的质量分布下来确定特殊积分[4]。

4.2.2 经典积分存在的情形

利用等式(4.2.6)可以得到刚体绕定点运动的某第四个经典积分存在的条件。

假设给定方程组(4.2.1)和式(4.2.3)的下述积分

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2) = c_3 \tag{4.2.7}$$

此时,有

$$\delta_1 = A^2x_1, \delta_2 = B^2x_2, \delta_3 = C^2x_3,$$

$$\delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = 0, \Delta = ABC(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})$$

Euler 动力学方程式(4.2.5),此时写成

$$\begin{aligned}
A\dot{x}_1 &= (B - C)x_2x_3 + Mg(Cx_3x_5 - Bx_2x_6)\frac{(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})}{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})}\\
B\dot{x}_2 &= (C - A)x_3x_1 + Mg(Ax_1x_6 - Cx_3x_4)\frac{(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})}{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})}\\
C\dot{x}_3 &= (A - B)x_1x_2 + Mg(Bx_2x_4 - Ax_1x_5)\frac{(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})}{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})}
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

方程组(4.2.3)和式(4.2.8)存在积分式(4.2.7)的充要条件是等式(4.2.6),有

$$\begin{aligned}
(z_cx_5 - y_cx_6)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f}) &= (Cx_3x_5 - Bx_2x_6)(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})\\
(x_cx_6 - z_cx_4)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f}) &= (Ax_1x_6 - Cx_3x_4)(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})\\
(y_cx_4 - x_cx_5)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f}) &= (Bx_2x_4 - Ax_1x_5)(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

由此得知，当刚体质心位于固定点，即 $x_c = y_c = z_c = 0$ 时，式(4.2.9) 成立。刚体质量的这种分布是存在给定积分式(4.2.7)的充分条件。这就是著名的 Euler 情形。

用类似讨论，可以证明，刚体质量分布为

$$A = B, x_c = y_c = 0, z_c \neq 0 \tag{4.2.10}$$

是存在积分

$$\omega_3 = x_3 = c_3 \tag{4.2.11}$$

的充分条件。这就是著名的 Lagrange 情形。刚体质量分布为

$$A = B = 2C, y_c = z_c = 0, x_c \neq 0 \tag{4.2.12}$$

是存在积分

$$\omega_3(x_1^2 - x_2^2 - nx_4)^2 + (2x_1x_2 - nx_5)^2 = c_3$$
$$\left(n = \frac{Mg}{C}x_c\right) \tag{4.2.13}$$

的充分条件。这就是著名的 Ковалевская 情形。

等式(4.2.6) 还可以解如下问题：当具有给定约束时，来确定与给定积分相应的刚体质量分布。

例如，给定刚体定点运动方程的第四个代数积分

$$\omega_3 = x_3(x_1^2 + x_2^2) - nx_1x_6 = c_3 \quad \left(n = \frac{Mg}{C}x_c\right) \tag{4.2.14}$$

而在运动过程中满足条件(约束)

$$4(x_1x_4 + x_2x_5) + x_3x_6 = 0 \tag{4.2.15}$$

据已知积分 $\omega_2 = c_2$，如果 $A = B = 4C$，则条件式(4.2.15) 满足，这意味着刚体对定点的动量矩在运动过程中保持在水平面上。此时，有

$$\delta_1 = 2x_1x_3 - nx_6, \delta_2 = 2x_2x_3,$$
$$\delta_3 = x_1^2 + x_2^2, \delta_4 = \delta_5 = 0, \delta_6 = -nx_1,$$

$$\Delta = 8C^2[2(x_1^2 + x^2) - x_3^2]f_6 - 4nC^2x_6f_4 \neq 0, (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{f}) = -3Cx_3f_6$$

将这些表达式代入式(4.2.6),并注意到式(4.2.15),得到

$$
\begin{aligned}
&8C^2(y_c f_5 + z_c f_6)[2x_5(x_1^2 + x_2^2) - x_2 x_3 x_6] = \Delta(z_c x_5 - y_c x_6) \\
&8C^2(y_c f_5 + z_c f_6)[x_1 x_3 x_5 - 2x_4(x_1^2 + x_2^2)] = -\Delta z_c x_4 \\
&8C^2(y_c f_5 + z_c f_6) x_3 f_6 = \Delta y_c x_4
\end{aligned}
\tag{4.2.16}
$$

由此直接得到刚体的相应质量分布

$$y_c = z_c = 0$$

在此分布下,考虑到约束式(4.2.15),存在给定的积分式(4.2.14)。注意到,所得到的刚体质量分布

$$A = B = 4C, y_c = z_c = 0, x_c \neq 0$$

对应于刚体定点运动的一个特殊情形,即 Горячев – Чаплыгин 情形。

4.2.3 线性积分的存在

假设刚体定点运动方程的积分对瞬时角速度的投影是线性的,并表示为

$$\omega_3 = Aax_1 + Bbx_2 + Ccx_3 = c_3 \tag{4.2.17}$$

其中 a,b,c 为待定常数。在此情形,有

$$\delta_1 = Aa, \delta_2 = Bb, \delta_3 = Cc, \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = 0,$$

$$\Delta = ABC(af_4 + bf_5 + cf_6) \neq 0$$

为解此问题,首先建立动力学方程式(4.2.5),使其有已知积分 $\omega_1 = c_1, \omega_2 = c_2$ 以及给定的线性积分式(4.2.17)。这些方程组成下述方程组

$$\dot{x}_1 = \frac{BC}{\Delta}[(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(bx_3 - cx_2) + Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(cx_5 - bx_6)]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{CA}{\Delta}[(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(cx_1 - ax_3) + Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(ax_6 - cx_4)]$$

$$\dot{x}_3 = \frac{AB}{\Delta}[(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(ax_2 - bx_1) + Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(bx_4 - ax_5)] \tag{4.2.18}$$

进而，组成存在给定线性积分式(4.2.17)的充要条件。这些条件可由方程式(4.2.18)的右端部分和已知的 Euler 方程的右端部分相等来得到，有

$$(B-C)x_2x_3 + Mg(z_cx_5 - y_cx_6) =$$

$$\frac{ABC}{\Delta}\{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(bx_3 - cx_2) + Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(cx_5 - bx_6)\}$$

$$(C-A)x_3x_1 + Mg(x_cx_6 - z_cx_4) =$$

$$\frac{ABC}{\Delta}\{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(cx_1 - ax_3) + Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(ax_6 - cx_4)\}$$

$$(A-B)x_1x_2 + Mg(y_cx_4 - x_cx_5) =$$

$$\frac{ABC}{\Delta}\{(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(ax_2 - bx_1) + Mg(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(bx_4 - ax_5)\}$$

由此分成两组

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(cx_5 - bx_6) &= (z_cx_5 - y_cx_6)(af_4 + bf_5 + cf_6)\\(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(ax_6 - cx_4) &= (x_cx_6 - z_cx_4)(af_4 + bf_5 + cf_6)\\(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(bx_4 - ax_5) &= (y_cx_4 - x_cx_5)(af_4 + bf_5 + cf_6)\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

以及

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(bx_3 - cx_2) &= (B-C)x_2x_3\frac{\Delta}{ABC}\\(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(cx_1 - ax_3) &= (C-A)x_3x_1\frac{\Delta}{ABC}\\(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(ax_2 - bx_1) &= (A-B)x_1x_2\frac{\Delta}{ABC}\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

等式(4.2.19)允许确定待求积分常数为

$$a = x_c, b = y_c, c = z_c$$

此时,等式(4.2.20)写成

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(y_c x_3 - z_c x_2) &= (\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(B - C)x_2 x_3 \\ (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(z_c x_1 - x_c x_3) &= (\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(C - A)x_3 x_1 \\ (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{f})(x_c x_2 - y_c x_1) &= (\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f})(A - B)x_1 x_2\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

所得等式(4.2.21),在下述任一条件满足下成立,即

$$A = B, x_c = y_c = 0, z_c \neq 0 \tag{4.2.22}$$

$$2A = B, x_c = z_c = 0, y_c \neq 0 \tag{4.2.23}$$

$$A(B - C)x_c^2 - C(A - B)z_c^2 = 0, y_c = 0 \tag{4.2.24}$$

$$A = B = C \tag{4.2.25}$$

这些条件分别对应如下已知可积情形:Lagrange 情形($\omega_3 = c_3$);Стеклов-Бобылев 情形($\omega_3 = c_3$);Hess-Аппельрот 情形($\omega_3 = 0$);完全对称刚体情形($\omega_3 = c_3$)。

注意到,等式(4.2.21)亦可作为约束方程来研究,在此约束下有线性积分

$$\omega_3 = A x_c x_1 + B y_c x_2 + C z_c x_3 = c_3 \tag{4.2.26}$$

将式(4.2.21)中三式分别乘以 x_c, y_c, z_c,再将结果相加,得到

$$[(B - C)x_c x_2 x_3 + (C - A)y_c x_3 x_1 + (A - B)z_c x_1 x_2](\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{f}) = 0 \tag{4.2.27}$$

由此得知,如果在运动的运动学元素上施加由方程

$$f_i = 0 \quad (i = 4,5,6) \tag{4.2.28}$$

描述的约束,或者施加由方程

$$(B - C)x_c x_2 x_3 + (C - A)y_c x_3 x_1 + (A - B)z_c x_1 x_2 = 0 \tag{4.2.29}$$

描述的约束,那么,刚体定点运动方程允许存在线性积分式(4.2.26)。此时,约束式(4.2.28)描述刚体绕铅垂轴的永久转

动，而约束式(4.2.29)对应 Staude 永久转动情形。

4.2.4 刚体运动的控制

按照已知积分 $\omega_1 = c_1$、$\omega_2 = c_2$ 以及假设的积分 $\omega_3 = c_3$ 所建立的动力学方程式(4.2.5)，可用于解刚体定点运动的控制问题。

提出如下问题：给定重刚体定点运动性质，由表达式

$$\omega_3(x_1, x_2, \cdots, x_6) = 0 \tag{4.2.30}$$

来描述，试确定控制力矩 M_u，使得带给定性质(式(4.2.30))的运动是刚体的一个可能运动。

在此问题中，带给定性质(式(4.2.30))的刚体运动就是规划运动，而性质本身就是运动规划。注意到，规划式(4.2.30)应是运动方程式(4.2.1)、式(4.2.3)的一个特殊积分。假设这个积分独立于积分 $\omega_0 = 1, \omega_1 = c_1, \omega_2 = c_2$，而函数 $\omega_3(x_1, x_2, \cdots, x_6)$ 在包括曲面式(4.2.30)的 ε 领域所有点的某域 $X\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$ 上对所有变量是可微的。为解所提问题，将动力学方程式(4.2.1)表示为

$$\begin{aligned} A\dot{x}_1 &= (B - C)x_2x_3 + Mg(z_cx_5 - y_cx_6) + M_{ux} \\ B\dot{x}_2 &= (C - A)x_3x_1 + Mg(x_cx_6 - z_cx_4) + M_{uy} \\ C\dot{x}_3 &= (A - B)x_1x_2 + Mg(y_cx_4 - x_cx_5) + M_{uz} \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

式中：M_{ux}、M_{uy}、M_{uz} 为待求控制力矩在动轴上的投影。此时，可根据给定积分，建立方程式(4.2.31)来解所提问题。将 $\omega_1 = c_1$，$\omega_2 = c_2$，$\omega_3 = 0$ 对时间 t 求导数，其中出现的 $\dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6$ 用式(4.2.3)替代，$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ 用式(4.2.31)替代，并解出控制力矩，得到

$$\begin{aligned} M_{ux} &= -\frac{ABC}{\Delta}Nf_4 + \Phi_1 \\ M_{uy} &= -\frac{ABC}{\Delta}Nf_5 + \Phi_2 \\ M_{uz} &= -\frac{ABC}{\Delta}Nf_6 + \Phi_3 \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

其中

$$N = [(B-C)x_2x_3 + Mg(z_cx_5 - y_cx_6)]\frac{\delta_1}{A} +$$

$$[(C-A)x_3x_1 + Mg(x_cx_6 - z_cx_4)]\frac{\delta_2}{B} +$$

$$[(A-B)x_1x_2 + Mg(y_cx_4 - x_cx_5)]\frac{\delta_3}{C} +$$

$$\delta_4 f_4 + \delta_5 f_5 + \delta_6 f_6$$

$$\Phi_1 = f_4\Phi, \Phi_2 = f_5\Phi, \Phi_3 = f_6\Phi$$

而 $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_6)$ 为在曲面式(4.2.30)上变为零的任意函数。

注意到,如果给定积分式(4.2.30)是刚体定点运动方程在已知可积情形(经典的,特殊的)中四个独立第一积分的结果,并满足加在刚体质量几何上的条件,那么有

$$M_{ux} = f_4\Phi, M_{uy} = f_5\Phi, M_{uz} = f_6\Phi \qquad (4.2.33)$$

由此得知,如果相应示点 $M(x_1, x_2, \cdots, x_6)$ 在曲面式(4.2.30)上,那么控制力矩变为零。

作为刚体定点运动控制的例子,研究确保刚体广义进动的问题。这个问题表示为刚体动力学逆问题的下述形式:确定控制力矩,在此力矩作用下刚体完成广义进动。所谓广义进动是指,在运动过程中瞬时角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在由铅垂单位矢量ς_0和重心矢径 $\boldsymbol{r}_c$ 所组成的平面上。注意到,广义进动可以在不加补充控制力,仅在加在刚体质量几何和角速度上的补充限制下来实现。应用按运动本身的给定性质建立运动方程的方法,可以给出控制力矩,在此力矩作用下存在刚体的广义进动,而对质量几何和运动指标不加任何限制。在所论问题中,描述广义进动的给定的特殊积分有如下形式,即

$$\omega_3 = \begin{vmatrix} x_c & y_c & z_c \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.2.34)$$

而

$$\delta_1 = z_c x_5 - y_c x_6, \delta_2 = x_c x_6 - z_c x_4, \delta_3 = y_c x_4 - x_c x_5$$

$$\delta_4 = y_c x_3 - z_c x_2, \delta_5 = z_c x_1 - x_c x_3, \delta_6 = x_c x_2 - y_c x_1 \tag{4.2.35}$$

将式(4.2.35)代入式(4.2.32),便可求得力矩投影 M_{ux}, M_{uy}, M_{uz},在此力矩作用下存在刚体的广义进动。如果在初始时刻有 $\omega_3(x_1, x_2, \cdots, x_6)|_{t=t_0} = 0$,那么在此力矩作用下将发生广义进动。

4.3 刚体运动方程的封闭

被众多数学家和力学家描述的刚体定点运动的 Euler 方程的解,与下述问题密切相关:在怎样的条件下,方程具有某些与刚体以确定性质运动相应的特殊类型的解。寻求 Euler 方程解的特殊情形,在很大程度上在19世纪至20世纪之交展开了,照例归结为寻求第一积分或特殊积分,并且研究它们的存在问题,这都是逆问题表征的。但是,动力学逆问题的统一解法只是在20世纪60年代至70年代才研究的,并以此为基础按给定的积分流形或一般按给定规划来组建微分方程组。

4.3.1 刚体运动方程的封闭

假设封闭运动方程组写成如下形式,即

$$\dot{x}_i = X_i(x_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.3.1}$$

式中:$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$;$X_i$ 为在域 $G \subseteq R^n$ 上确定的 C^1 类函数,并且 $(n-l)(l<n)$ 个方程的右端是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的已知函数。此时,封闭问题归结为确定函数 $X_1, X_2, \cdots, X_l$ 的结构,使得由相容等式

$$\omega_\mu(x_j) = a_\mu, a_\mu = 常数 \quad (\mu = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.3.2}$$

所确定的 R^n 中的流形 Ω 是方程组(4.3.1)的积分。

此问题的解法如下。将式(4.3.2)按方程式(4.3.1)求导数，得到

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_i} X_i = \Phi_\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,m; i = 1,2,\cdots,n) \quad (4.3.3)$$

式中：Φ_μ 为 Еругин 函数，它们在由等式(4.3.2)确定的积分流形上变为零。如果 $l \geqslant m$，那么 $X_{m+1},\cdots,X_l$ 是任意的，而由前面 m 个线性方程式(4.3.3)解得

$$X_i = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{ki}\Phi_k - \Delta^{ij}X_j)\ (i,k = 1,2,\cdots,m; j = m+1,m+2,\cdots,n) \quad (4.3.4)$$

式中：Δ_{ki} 为行列式 $\Delta = \det\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_i}\right)_{m\times m} \neq 0$ 的元素 (k,i) 的代数余子式；Δ^{ij} 为由 Δ 第 i 列用方程式(4.3.3)矩阵的第 j 列替代所得行列式。如果 $l < m$，那么当按方程式(4.3.4)构造的 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与封闭方程组给定的右端相重合时，问题就有解。

作为方程式(4.3.1)，研究 Euler 动力学方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_0x_2x_3 + \frac{1}{A}M_1 = f_1 \\ \dot{x}_2 &= B_0x_3x_1 + \frac{1}{B}M_2 = f_2 \\ \dot{x}_3 &= C_0x_1x_2 + \frac{1}{C}M_3 = f_3 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

式中：x_1,x_2,x_3 为刚体瞬时角速度 ω 在对定点 O 的惯性椭球主轴 Ox,Oy,Oz 上的投影；A,B,C 分别为对轴 Ox,Oy,Oz 的惯性矩；$A_0 = \frac{B-C}{A}, B_0 = \frac{C-A}{B}, C_0 = \frac{A-B}{C}$；$M_i(x_1,x_2,\cdots,x_6)\ (i = 1,2,3)$ 为作用在刚体上的力的主矩 M_0 在轴上的投影，并研究封闭方程组

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,x_2,\cdots,x_6) \quad (i = 4,5,6) \quad (4.3.6)$$

其中变量 x_4,x_5,x_6 以某种方式确定刚体在力场中的位置。例如，

它们可以是确定与刚体固联的坐标系 $Oxyz$ 相对于空间固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的位置的 Euler 角，此时方程式(4.3.6) 乃是 Euler 运动学方程

$$\dot{\varphi} = x_3 - (x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi)$$

$$\dot{\psi} = (x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi)/\sin\theta \qquad (4.3.7)$$

$$\dot{\theta} = x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi$$

或者是空间某固定轴，如 $O\zeta$，在坐标系 $Oxyz$ 中的方向余弦 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，此时方程式(4.3.6) 乃是 Poisson 方程

$$\dot{\gamma}_1 = x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3, \dot{\gamma}_2 = x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1, \dot{\gamma}_3 = x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2 \qquad (4.3.8)$$

假设刚体运动规划式(4.3.2) 用下述等式给出，即

$$\omega_\mu(x_1,x_2,\cdots,x_6) = a_\mu, a_\mu = \text{常数}(\mu = 1,2,3) \quad (4.3.9)$$

此时在 $\Delta = \det(\delta_{\mu i})_{3\times3} \neq 0$ 的前提下，其中 $\delta_{\mu i} = (\partial\omega_\mu/\partial x_i)(\mu = 1,2,3; i = 1,2,\cdots,6)$，封闭方程组按式(4.3.4) 写成

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{ki}\Phi_k - \Delta^{ij}f_j) \quad (i,k = 1,2,3; j = 1,2,\cdots,6) \qquad (4.3.10)$$

令方程式(4.3.3) 和方程式(4.3.10) 的右端相等，就给出为确定力矩 M_1,M_2,M_3 的方程组。如果在式(4.3.9) 中某些 a_μ 是任意常数，那么相应的 Φ_μ 在全空间 $R^6(x_1,x_2,\cdots,x_6)$ 中变为零。特别地，当所有等式(4.3.9) 都是第一积分时，对力矩的方程可写成如下形式，即

$$A_0x_2x_3 + \frac{M_1}{A} = -\frac{1}{\Delta}(\Delta^{14}f_4 + \Delta^{15}f_5 + \Delta^{16}f_6)$$

$$B_0x_3x_1 + \frac{M_2}{B} = -\frac{1}{\Delta}(\Delta^{24}f_4 + \Delta^{25}f_5 + \Delta^{26}f_6) \qquad (4.3.11)$$

$$C_0x_1x_2 + \frac{M_3}{C} = -\frac{1}{\Delta}(\Delta^{34}f_4 + \Delta^{35}f_5 + \Delta^{36}f_6)$$

这些等式在任何情形都应在流形 Ω 上成立。如果力矩由式(4.3.11)确定,那么等式(4.3.9)将是第一积分。在此情形,Ω 与全空间重合。根据 $\Delta \neq 0$,由等式(4.3.11)可将 x_1,x_2,x_3 表示为 x_4,x_5,x_6 的函数。此时,由式(4.3.11)确定 $M_i(x_4,x_5,x_6)(i=1,2,3)$,而刚体在仅依赖于 x_4,x_5,x_6 的主矩的力场中按性质式(4.3.9)而实现运动。当 a_μ 是一些固定数的情形,需要变量的初值满足条件(4.3.9)。

假设力场是有势的,此时在式(4.3.9)中可取

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2) - U(x_4,x_5,x_6) = h \tag{4.3.12}$$

式中:U 为力函数;h 为能量常数。在 $\Delta = Ax_1\Delta_{11} + Bx_2\Delta_{12} + Cx_3\Delta_{13} \neq 0$ 的情形,展开表达式 Δ^{ij},则等式(4.3.11)有如下形式,即

$$\begin{aligned}
A_0x_2x_3 + \frac{M_1}{A} &= \frac{1}{\Delta}[\Delta_{11}\dot{U}_f + N_2(Bx_2\delta_{33} - Cx_3\delta_{32}) + \\
&\quad N_3(Cx_3\delta_{22} - Bx_2\delta_{23})] \\
B_0x_3x_1 + \frac{M_2}{B} &= \frac{1}{\Delta}[\Delta_{12}\dot{U}_f + N_2(Cx_3\delta_{31} - Ax_1\delta_{33}) + \\
&\quad N_3(Ax_1\delta_{23} - Cx_3\delta_{21})] \\
C_0x_1x_2 + \frac{M_3}{C} &= \frac{1}{\Delta}[\Delta_{13}\dot{U}_f + N_2(Ax_1\delta_{32} - Bx_2\delta_{31}) + \\
&\quad N_3(Bx_2\delta_{21} - Ax_1\delta_{22})]
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

其中

$$\dot{U}_f = \frac{\partial U}{\partial x_4}f_4 + \frac{\partial U}{\partial x_5}f_5 + \frac{\partial U}{\partial x_6}f_6$$

$$N_2 = \delta_{24}f_4 + \delta_{25}f_5 + \delta_{26}f_6$$

$$N_3 = \delta_{34}f_4 + \delta_{35}f_5 + \delta_{36}f_6$$

如果 $x_4 = \varphi, x_5 = \psi, x_6 = \theta$,那么,力矩 M_i 与力函数的关系为

$$M_1 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}\sin\varphi\cot\theta + \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\cos\varphi$$

$$M_2 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}\cos\varphi\cot\theta + \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta}\sin\varphi \qquad (4.3.14)$$

$$M_3 = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

而如果 $x_4 = \gamma_1, x_5 = \gamma_2, x_6 = \gamma_3$，那么力矩 M_i 与力函数的关系为

$$M_1 = \gamma_3\frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial U}{\partial \gamma_3}$$

$$M_2 = \gamma_1\frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial U}{\partial \gamma_1} \qquad (4.3.15)$$

$$M_3 = \gamma_2\frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial U}{\partial \gamma_2}$$

将由式(4.3.9) 解出的变量 x_1, x_2, x_3 的表达式代入式(4.3.13)，可导出对函数 $U(x_4, x_5, x_6)$ 的线性偏微分方程组。如果所得系数满足这类方程的可解条件，那么，所得函数 U 确定一个力场，刚体在此力场中按给定的规划式(4.3.9) 完成运动。当 a_μ 是某些固定数时，则需变量的初值满足相应的关系式(4.3.9)。

如果函数 ω_μ 依赖于某些参数 $\boldsymbol{p}$，那么偏微分方程式(4.3.13) 的系数就依赖于这些参数，因此，所得函数有 $U = U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$，而力矩为 $M_i = M_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$。

4.3.2 在轴对称力场中的规划进动

前面的结果可用于确定场的力矩 $M_i (i = 1,2,3)$，使得刚体在此力场中能够完成对该轴的规划进动。已知在这类运动中，刚体角速度 ω 的模以及 ω 在固定进动轴上的投影和在固联于刚体上的自旋轴上的投影，都是常值。

取固定坐标系的轴 $O\zeta$ 沿场的对称轴，并用 α, β, γ 表示自旋轴系中的方向余弦。根据所指性质，等式(4.3.9) 有如下形式，即

$$\omega_1 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = n$$

$$\omega_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \omega_0^2$$

$$\omega_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = m \tag{4.3.16}$$

式中：m,n,ω_0 为常数。如果假设 $\Delta = \alpha f_4 + \beta f_5 + \gamma f_6 \neq 0$，其中 $f_i(i=4,5,6)$ 是方程式(4.3.8)的右端部分，那么，由于关系 $x_1 f_4 + x_2 f_5 + x_3 f_6 = 0$，表达式(4.3.11)的右端将等于零，因此 x_i = 常数$(i=1,2,3)$。

研究退化情形。设$\boldsymbol{\varsigma}_0$ 和 $\boldsymbol{\rho}_0$ 分别为指向进动轴和自旋轴的单位矢量。此时容易看出

$$\Delta = (\boldsymbol{\rho}_0 \times \boldsymbol{\varsigma}_0) \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{4.3.17}$$

而等式$\Delta = 0$意味着矢量$\boldsymbol{\varsigma}_0$、$\boldsymbol{\rho}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 处于同一平面上，即刚体的运动是广义进动。引进矢量 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\rho}_0 \times \boldsymbol{\varsigma}_0$，那么式(4.3.16)和式(4.3.17)可写成如下形式，即

$$\omega_1 = \boldsymbol{\varsigma}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} = n, \omega_2 = |\boldsymbol{\omega}^2| = \omega_0^2$$

$$\omega_3 = \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} = m, \omega_4 = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{4.3.18}$$

容易看出，这些关系是独立的。假设

$$\Delta_0 = \frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)} \neq 0$$

则按式(4.3.4)可求得封闭方程组右端的表达式。研究矢量 $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\varsigma}_0 \times \boldsymbol{\omega}$，由 $\omega_4 = 0$ 可知，矢量 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{f},\boldsymbol{\nu}$ 共线。令 $D = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu} \neq 0$，得到

$$\Delta_0 = (\gamma x_2 - \beta x_3)\Delta - x_1 D$$

由此得知，计算行列式 Δ^{ij} 并考虑到 $X_5 = f_5, X_6 = f_6$，得到 $X_4 = f_4$ 以及

$$X_i = -\frac{1}{D}\nu_i(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{f}) \quad (i = 1,2,3) \tag{4.3.19}$$

进而，它们必须与f_i 相等。为求得依赖于 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 的力矩 $M_i(i=1,2,3)$ 的表达式，必须在所得等式中借助式(4.3.18)消去 x_1,x_2,x_3。利用矢量双重积公式，有

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_0 \times \boldsymbol{\varsigma}_0)$$
$$= \boldsymbol{\rho}_0(\boldsymbol{\varsigma}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\varsigma}_0(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\omega})$$
$$= n\boldsymbol{\rho}_0 - m\,\boldsymbol{\varsigma}_0$$
$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}) = -\boldsymbol{\omega} \mid \boldsymbol{\eta} \mid^2$$

由此得到

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\delta}[m(\boldsymbol{\varsigma}_0 \times \boldsymbol{\eta}) - n(\boldsymbol{\rho}_0 \times \boldsymbol{\eta})]$$
$$\delta = \mid \boldsymbol{\eta} \mid^2 \tag{4.3.20}$$

将此表达式代入确定矢量 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$ 的公式中,考虑到等式

$$\boldsymbol{\varsigma}_0 \times (\boldsymbol{\varsigma}_0 \times \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\varsigma}_0(\boldsymbol{\varsigma}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varsigma}_0 \cdot \boldsymbol{\varsigma}_0) = -\boldsymbol{\eta}$$
$$(\boldsymbol{\rho}_0 \times \boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0) - \boldsymbol{\rho}_0(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}$$
$$(\boldsymbol{\varsigma}_0 \times \boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\rho}_0 = (\boldsymbol{\rho}_0 \times \boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\varsigma}_0 = s\boldsymbol{\eta}$$
$$s = \cos(\widehat{\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varsigma}_0}) = \text{常数}$$

得到 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{\nu}$ 的下述表达式,即

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{\delta}(ns - m)\boldsymbol{\eta}$$
$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\delta}(ms - m)\boldsymbol{\eta} \tag{4.3.21}$$

因此,有

$$X_i = \frac{1}{\delta^2}(m - ns)(ms - n)\eta_i \quad (i = 1,2,3) \tag{4.3.22}$$

如果场力主矩在坐标轴上投影有如下形式,即

$$M_1 = (C - B)x_2x_3 + AX_1$$
$$M_2 = (A - C)x_3x_1 + BX_2 \tag{4.3.23}$$
$$M_3 = (B - A)x_1x_2 + CX_3$$

其中 x_1, x_2, x_3 按式(4.3.20)消去,那么当 x_i 和 $\gamma_i\ (i = 1,2,3)$ 的初值满足等式(4.3.18)时,刚体在这个力场中完成规划进动。

研究一个特殊情形，此时自旋轴是惯性椭球的主轴。例如，可设此轴为轴 Oz，此时有 $\alpha=\beta=0,\gamma=1$。由此得到，$x_3=m,\gamma_3=s,x_1^2+x_2^2=\omega_0^2-m^2,\delta^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2$ 是常量。矢量 $\boldsymbol{\eta}$ 的分量为 $\eta_1=-\gamma_2,\eta_2=\gamma_1,\eta_3=0$，因此，有

$$x_1=\sigma\gamma_1,x_2=\sigma\gamma_2,\sigma=\frac{1}{\delta}(n-ms) \tag{4.3.24}$$

这时，有

$$X_1=E\sigma\gamma_2,X_2=-E\sigma\gamma_1,X_3=0,E=m-\sigma s \tag{4.3.25}$$

而 M_i 的表达式有如下形式，即

$$\begin{aligned}M_1&=[(C-B)m+AE]\sigma\gamma_2\\M_2&=[(A-C)m-AE]\sigma\gamma_1\\M_3&=(B-A)\sigma^2\gamma_1\gamma_2\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

现在假设场是有势的。由等式(4.3.15)可知，成立恒等式

$$M_1\gamma_1+M_2\gamma_2+M_3\gamma_3=0 \tag{4.3.27}$$

将其代入表达式(4.3.26)，得到

$$(A-B)E=0 \tag{4.3.28}$$

因 $E\neq0$，故有 $A=B$。因此，在此情形下，规划进动仅对动力对称刚体才是可能的。

4.4 刚体运动方程的修改

4.4.1 刚体运动方程的修改问题

研究自治微分方程组

$$\dot{x}_i=X_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.4.1}$$

式中：$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$；$X_i$ 为域 $G\subseteq R^n$ 上确定的 C^1 类函数；$\boldsymbol{p}(p_1,p_2,\cdots)\in\Pi$ 为由某集合 Π 中选取的参数，称其为固有参

数。

提出如下问题：描述所有子集 $P \subseteq \Pi$，使 $p \in P$ 下方程组(4.4.1)有表示为等式组

$$\omega_\mu(\boldsymbol{x}) = a_\mu, a_\mu = 常数(\mu = 1,2,\cdots,m) \quad (4.4.2)$$

的性质的一个解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$，其中 $\omega_\mu \in C^1(G)$；在此设满足等式

$$f_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,r) \quad (4.4.3)$$

它们是方程组(4.4.1)的特殊积分组。这意味着，函数 $f_i \in C^1(G)$，对方程式(4.4.1)的任何解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$，当对某个 t_0 有 $f_j(\boldsymbol{x}(t_0)) = 0$ 时，则成立 $f_j(\boldsymbol{x}(t)) = 0 (j = 1,2,\cdots,r)$。换言之，在由等式(4.4.3)确定的流形 Ω_f 上开始的方程式(4.4.1)的所有相轨道，在以后不离开它的边界。

用 Ω_ω 表示由等式(4.4.2)确定的流形，用 Ω_p 表示 R^n 中由相轨道组成的集合，对此集合等式(4.4.2)和式(4.4.3)在任何 $p \in P$ 下成立。此时，有

$$\Omega_p \subseteq \{\Omega_f \cap \Omega_\omega\} \quad (4.4.4)$$

进而假设，方程组(4.4.1)具有某个第一积分总合，即

$$F_l(\boldsymbol{x}) = c_l \quad (l = 1,2,\cdots,q) \quad (4.4.5)$$

函数组 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m, f_1, f_2, \cdots, f_r, F_1, F_2, \cdots, F_q$ 假设为独立的，等式(4.4.2)和式(4.4.3)是相容的，且 $m + r + q \leqslant n$。

所提问题是第1章意义下修改问题的一种变形，可利用按给定积分流形来组建微分方程组的办法来解。设方程组

$$\dot{x}_i = \psi_i(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \quad (4.4.6)$$

具有第一积分式(4.4.5)、特殊积分式(4.4.3)以及带性质式(4.4.2)的一个解。将式(4.4.2)、式(4.4.3)和式(4.3.5)按照方程式(4.4.6)求导数，给出对 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ 的线性方程组

$$\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_i}\psi_i = \Phi_{\mu} \quad (\mu = 1,2,\cdots,m; i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\psi_i = \Phi_j^{(f)} \quad (j = 1,2,\cdots,r; i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.4.7}$$

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_i}\psi_i = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,q; i = 1,2,\cdots,n)$$

式中：$\Phi_j^{(f)}$、Φ_{μ} 为任意函数，并在 Ω_f 和 Ω_p 上分别变为零。如果

$$\Delta = \frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m,f_1,f_2,\cdots,f_r,F_1,F_2,\cdots,F_q)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{m+r+q})} \neq 0$$

那么，由式(4.4.7)可确定 ψ_i 的表达式为

$$\psi_i = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{\nu i}\Phi_{\nu} + \Delta_{m+\eta,i}\Phi_{\eta}^{(f)} - \Delta^{is}\psi_s) \tag{4.4.8}$$

$$(\nu = 1,\cdots,m; \eta = 1,\cdots,r;$$

$$s = m+r+q+1,\cdots,n; i = 1,\cdots,m+r+q)$$

式中：$\psi_s(s = m+r+q+1,\cdots,n)$ 为 C^1 类任意函数；Δ_{ji} 为行列式 Δ 元素 (j,i) 的代数余子式；Δ^{is} 为 Δ 中第 i 列用线性方程组(4.4.7)矩阵的第 s 列替代所得行列式。根据式(4.4.4)，函数 $\Phi_j^{(f)}$ 在 Ω_p 上变为零，因此，在集合 Ω_p 上满足等式

$$X_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{\Delta}\Delta^{is}X_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$$

$$(i = 1,\cdots,m+r+q; s = m+r+q+1,\cdots,n) \tag{4.4.9}$$

这时存在固有参数集合的待求子集 P 的充要条件。集合 Ω_p 本身不是已知的，特别地，它可以是一维流形，即相空间中的曲线。如果存在这样的子集 P_0，使等式(4.4.9)在 $\Omega_f \cap \Omega_{\omega}$ 上成立，那么式(4.4.2)、式(4.4.3)的总合组成特殊积分组。如果这样的子集不存在，那么，在式(4.4.4)中成立严格的耦合。此时，可借助第一积分式(4.4.5)来确定 Ω_p。用 σ_l 表示在固定值 C_l 下由式(4.4.5)所确定的曲面，并研究嵌入流形序列

$$\Sigma_q \subset \Sigma_{q-1} \subset \cdots \subset \Sigma_1, \Sigma_l = \prod_{j=1}^{l} \sigma_j$$

对每个$l = 1,2,\cdots,q$，定义子集$P_l \subseteq \Pi$作为固有参数的集合，此时式(4.4.9)在流形$\Omega_f \cap \Omega_\omega \cap \Sigma_l$上满足，常数$C_1, C_2, \cdots, C_l$一般说是参数$p \in P_l$的函数。某些集合$P_l$可以是空集。

如果$m + r + q = n$，那么集合P可最终写出来。反之，式(4.4.9)可作为包含Ω_p的某些曲面方程来研究。将所有相加项移到左端，可将式(4.4.9)写成

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m + r + q) \tag{4.4.10}$$

设$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_{m_1}$是函数$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m, \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{m+r+q}$的最大独立子系统。此时，可用指出的方法解原来的问题，只要用等式组

$$\tilde{\omega}_\mu(\boldsymbol{x}) = \tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\mu = \text{常数} \quad (\mu = 1,2,\cdots,m_1; m_1 > m) \tag{4.4.11}$$

替代等式组(4.4.2)，而类似于式(4.4.10)，得到等式

$$\tilde{\psi}_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m + r + q) \tag{4.4.12}$$

当研究形如式(4.4.2)的m_η个等式时，这个过程可重复η次，因为量m_η每次至少增加1，那么原问题可经有限步解出。

必须注意，满足所提问题条件的固有参数的每个子集P对应于所有可能初值集合中的子集，它具有如下性质：在方程式(4.4.1)带有这个子集的初值的所有解上满足式(4.4.2)和式(4.4.3)。初值$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$的任何集合，以及它们的任意$C^1$类函数的值，如量$C_j$或$q_\mu$，称为积分参数。引进如下定义：对给定的$P \subset \Pi$，在$p \in P$下方程组(4.4.1)在条件式(4.4.3)下满足式(4.4.2)的解族$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$，如果独立积分参数的最大数目等于$k$，则称为$k$参数$\omega$族。显然，所指族积分曲线的相轨道组成集合$\Omega_p$。因为上述方法借助隐式方程确定$\Omega_p$，如果式(4.4.10)中的函数$\psi_i(\boldsymbol{x})$是$C^1$类，那么，$\Omega_p$将是$C^1$类$k$维流形。

还要注意,当研究形如

$$\omega_{\mu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = a_{\mu} \quad (\mu = 1,2,\cdots,m) \tag{4.4.13}$$

的等式替代式(4.4.2)时,所提问题可以推广,其中量 a_{μ} 以及 C_l 可以是 $\boldsymbol{p}$ 的函数或取某些固定值。此时,在等式 $\omega_{\mu} = a_{\mu}$ 中引进参数 $\boldsymbol{p}$,有可能使行列式 Δ 在某些 $p \in \Pi$ 下变为零。这种情形需要特别研究,在式(4.4.13)中消除不独立关系,问题解法不变。

注意,用 Poincaré 引出的不变关系概念,可以确定 Ω_p。对给定方程组(4.4.1),关系 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ 称为 $(l-1)$ 阶不变关系,如果序列 $\{\varphi^{(j)}\}$ $(j = 0,1,2,\cdots)$,其中

$$\varphi^{(0)} = \varphi, \varphi^{(j)}(\boldsymbol{x}) = X_{\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \varphi^{(j-1)}(\boldsymbol{x})$$

$$(\nu = 1,\cdots,n; j = 1,2,\cdots) \tag{4.4.14}$$

包含 l 个函数独立项,并且

$$\prod_{j=1}^{l} \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(j)}(\boldsymbol{x}) = 0\} \neq \phi$$

这个序列,无论对函数 $\psi_i(\boldsymbol{x})$,还是对函数 $\omega_{\mu}(\boldsymbol{x})$ 本身,都可建立。显然,如在 $r = q = 0, m = 1$ 下,等式 $\omega_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 是 $(l-1)$ 阶不变关系,那么,相应的解族 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$,根据上述定义,将是 $(n-l)$ 参数 ω_1 族。这里指出的确定流形 Ω 的方法,可立刻得到式(4.4.9)作为问题可解的充要条件。此外,构造的函数 ψ_i 对给定的函数 $X_i(\boldsymbol{x})$,在某些固定值 $\boldsymbol{p}$ 下有可能要满足补充条件

$$X_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \widetilde{X}_i(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.4.15}$$

4.4.2 刚体在 Newton 力场中的动力学逆问题

前面给出的一般方法可用于解确定定点刚体的质量几何问题,使得按给定性质的运动族是 k 参数的。

研究具有引力中心 O^* 的 Newton 力场中的刚体,中心 O^* 距固定点 O 为 R。使固定坐标系的轴 $O\zeta$ 沿 O^*O,写出运动方程组如

下，即

$$A\dot{x}_1 + (C - B)x_2x_3 = Mg(z_c\gamma_2 - y_c\gamma_3) + 3\frac{g}{R}(C - B)\gamma_2\gamma_3$$

$$B\dot{x}_2 + (A - C)x_3x_1 = Mg(x_c\gamma_3 - z_c\gamma_1) + 3\frac{g}{R}(A - C)\gamma_3\gamma_1$$

$$C\dot{x}_3 + (B - A)x_1x_2 = Mg(y_c\gamma_1 - x_c\gamma_2) + 3\frac{g}{R}(B - A)\gamma_1\gamma_2$$

(4.4.16)

式中：x_1, x_2, x_3 为刚体角速度在沿定点 O 的惯性椭球主轴方向指向的动坐标系轴上的投影；x_c, y_c, z_c 为刚体质心投影；A, B, C 为对这些轴的惯性矩；M 为刚体质量；g 为距 O^* 为 R 的引力加速度；γ_1，γ_2, γ_3 为轴 $O\zeta$ 在动系中的方向余弦，其变化由下述方程组描述，即

$$\dot{\gamma}_1 = x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3$$

$$\dot{\gamma}_2 = x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1$$

$$\dot{\gamma}_3 = x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2 \qquad (4.4.17)$$

方程组(4.4.16)和式(4.4.17)，除平凡积分 $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ 外，还有两个第一积分：能量积分和对轴 $O\zeta$ 的动量矩积分，对这两个积分添加以某种方式给出的独立的第三个积分，于是可将关系式(4.4.2)写成

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2) + Mg(x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3) +$$

$$\frac{3g}{2R}(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = h \qquad (4.4.18)$$

$$\omega_2 = Ax_1\gamma_1 + Bx_2\gamma_2 + Cx_3\gamma_3 = n$$

$$\omega_3 = \omega_3(x_1, x_2, x_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = c$$

式中：h, n, c 为常数。相应的式(4.4.9)，在矢量形式下可表示为如下形式[4]，即

$$\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{\omega} + Mg(\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{r}_c) + \frac{3g}{R}(\boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{L}) = \frac{1}{\Delta}\left\{(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{f})(\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{\omega}) -\right.$$

$$(\bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{f} + \left[Mg(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{f}) + 3\frac{g}{R}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{f}) \right](\boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{d}) \Bigg\} \tag{4.4.19}$$

式中：$\boldsymbol{\omega}(x_1, x_2, x_3)$ 为刚体角速度；$\boldsymbol{G}(Ax_1, Bx_2, Cx_3)$ 为对固定点 O 的动量矩；$\boldsymbol{\zeta}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 为轴 $O\zeta$ 的单位矢量；$\boldsymbol{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ 为质心矢径；$\boldsymbol{f}(f_1, f_2, f_3)$ 为方程组(4.4.17) 右端的矢函数；$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(A\gamma_1, B\gamma_2, C\gamma_3)$；$\bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}(\delta_4, \delta_5, \delta_6)$；$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}\left(\frac{\delta_1}{A}, \frac{\delta_2}{B}, \frac{\delta_3}{C}\right.$；$\delta_s = \frac{\partial \omega_s}{\partial x_s}, \delta_{3+s} = \frac{\partial \omega_s}{\partial \gamma_s}(s = 1,2,3)$；$\Delta = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{f} \neq 0$。

可以看出以下三种情形中式(4.3.19) 成立。

(1) 当 $x_c = y_c = z_c = 0, A = B$ 时，存在线性第一积分 $\omega_3 = x_3 = c$。

(2) 当 $x_c = y_c = z_c = 0$ 时，存在平方第一积分

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - \frac{3g}{R}BC\gamma_1^2 - \frac{3g}{R}CA\gamma_2^2 + \frac{3g}{R}AB\gamma_3^2\right) = c$$

前一情形类似于 Lagrange 情形，后一情形类似于 Euler 情形。在这两种情形，条件式(4.4.19) 对用方向余弦间唯一关系相联系的变量所有值都成立。因此，解族是五参数的。

(3) 设 $\gamma_2 = x_1 = 0$，此时式(4.4.19) 成立，并存在积分 $\omega_3 = x_3 = 0$。设 $\gamma_1 = \sin\theta, \gamma_3 = -\cos\theta$，这里 $\theta = \theta(t)$。由方程组(4.4.16) 得到

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$B\ddot{\theta} = -Mgz_c\sin\theta + \frac{3g}{R}(A - C)\sin\theta\cos\theta$$

由此得到

$$\frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\alpha\cos\theta + \beta\sin^2\theta + a_1}} = t + a_2$$

其中

$$\alpha = Mgz_c, \beta = \frac{3g}{2R}(A - C)$$

而 a_1、a_2 为常数。因此，θ 为椭圆积分。所论情形是刚体平面运动的特殊情形，而解族是一参数的。

4.5 势力场中 Hess 运动的条件

本节讨论势力场中 Hess 运动的条件，包括用 Euler 角及其导数表示的运动方程、Hess 运动的条件等。

4.5.1 用 Euler 角及其导数表示的运动方程

研究刚体定点运动，并选 Euler 角 ψ、θ、φ 为确定其位置的广义坐标。据 Euler 运动学方程，刚体瞬时角速度在沿固定点处惯性椭球主轴指向的动坐标轴的投影为

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$

$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$$

$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \tag{4.5.1}$$

设对轴 Ox, Oy, Oz 的惯性矩为 A, B, C，则刚体动能有如下形式，即

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) =$$

$$\frac{1}{2}(a_{11}\dot{\psi}^2 + a_{22}\dot{\theta}^2 + a_{33}\dot{\varphi}^2 + 2a_{12}\dot{\psi}\dot{\theta} + 2a_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi}) \tag{4.5.2}$$

其中

$$a_{11} = (A\sin^2\theta + B\cos^2\varphi - C)\sin^2\theta + C$$

$$a_{22} = (A - B)\cos^2\varphi + B$$

$$a_{33} = C$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}(A - B)\sin\theta\sin2\varphi$$

$$a_{13} = C\cos\theta$$

当 $\sin\theta \neq 0$ 时，刚体运动方程有如下形式，即

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{4D}(d_{11}\dot{\psi}^2 + 2d_{12}\dot{\psi}\dot{\theta} + 2d_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi} + 2d_{23}\dot{\theta}\dot{\varphi} + d_0)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{4D}(e_{11}\dot{\psi}^2 + 2e_{12}\dot{\psi}\dot{\theta} + 2e_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi} + 2e_{23}\dot{\theta}\dot{\varphi} + e_0)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{4D}(f_{11}\dot{\psi}^2 + f_{12}\dot{\theta}^2 + 2f_{12}\dot{\psi}\dot{\theta} + 2f_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi}\dot{\theta} + 2f_{23}\dot{\theta}\dot{\varphi} + f_0)$$

$$(4.5.3)$$

其中

$$d_{11} = -(A - B)(A + B - C)C\sin\theta\sin2\theta\sin2\varphi$$

$$d_{12} = -(A + B - C)C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\sin2\theta$$

$$d_{13} = -(A - B)(A + B - C)C\sin^2\theta\sin2\varphi$$

$$d_{23} = -2C[(A - B)(A\cos^2\varphi - B\sin^2\varphi) - C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)]\sin\theta$$

$$e_{11} = 2C[A^2\sin^2\varphi + B^2\cos^2\varphi - C(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)]\sin^2\theta\sin2\theta$$

$$e_{12} = (A - B)(A + B - C)C\sin\theta\sin2\theta\sin2\varphi$$

$$e_{13} = 2C[(A - B)(A\sin^2\varphi - B\cos^2\varphi) - C(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)]\sin^3\theta$$

$$e_{23} = (A - B)(A + B - C)C\sin^2\theta\sin2\varphi$$

$$f_{11} = 2(A - B)[AB\sin^2\theta + (A + B - C)C\cos^2\theta]\sin^2\theta\sin2\varphi$$

$$f_{22} = -2AB(A - B)\sin^2\theta\sin2\varphi$$

$$f_{12} = 2\{AB[(A - B)\cos^2\varphi + C]\sin^2\theta + C(A + B - C)(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\cos^2\theta\}$$

$$f_{13} = \frac{1}{2}(A - B)(A + B - C)C\sin\theta\sin2\theta\sin2\varphi$$

$$f_{23} = C[(A-B)(A\cos^2\varphi - B\sin^2\varphi) - C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)]\sin 2\theta$$

$$d_0 = 4C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)Q_\psi - 2(A-B)C\sin\theta\sin 2\varphi Q_\theta - 4C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\cos\theta Q_\varphi$$

$$e_0 = -2(A-B)C\sin\theta\sin 2\varphi Q_\psi + 4C(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta Q_\theta + (A-B)C\sin 2\theta\sin 2\varphi Q_\varphi$$

$$f_0 = -4C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\cos\theta Q_\psi + (A-B)C\sin 2\theta\sin 2\varphi Q_\theta + 4[AB\sin^2\theta + C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\cos^2\theta]Q_\varphi$$

$$D = ABC\sin^2\theta$$

式中：$Q_\psi, Q_\theta, Q_\varphi$ 为广义力。

4.5.2 Hess 运动条件

现在考察，在加在刚体质量几何，即加在惯性矩 A, B, C 和质心坐标 x_c, y_c, z_c 上的怎样条件下，以及在怎样的力场势能下，刚体在此场中以由下述关系(Hess 积分)

$$Ax_c p + Cz_c r = 0 \tag{4.5.4}$$

表示的性质的运动是可能的。

Hess 积分式(4.5.4)可表示为

$$\omega = a\dot{\psi} + b\dot{\theta} + c\dot{\varphi} = 0 \tag{4.5.5}$$

其中

$$a = Ax_c\sin\theta\sin\varphi + Cz_c\cos\theta$$

$$b = Ax_c\cos\varphi, c = Cz_c$$

将式(4.5.5)对 t 求导数，得

$$\dot{\omega} = a\ddot{\psi} + b\ddot{\theta} + c\ddot{\varphi} + d\dot{\psi}\dot{\theta} + e\dot{\psi}\dot{\varphi} + f\dot{\theta}\dot{\varphi} = \Phi \tag{4.5.6}$$

其中 Φ 为 Еругин 函数，而

$$d = Ax_c\cos\theta\sin\varphi - Cz_c\sin\theta$$

$$b = Ax_c\sin\theta\cos\varphi, f = -Ax_c\sin\varphi$$

将方程式(4.5.3)带入式(4.5.6),消去 $\ddot{\psi},\ddot{\theta},\ddot{\varphi}$,得到

$$\Phi = \frac{1}{2}(c_{11}\dot{\psi}^2 + c_{22}\dot{\theta}^2 + 2c_{12}\dot{\psi}\dot{\theta} + 2c_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi} + 2c_{23}\dot{\theta}\dot{\varphi} + c_0) \tag{4.5.7}$$

其中

$$c_{11} = 2[(B-C)]x_c\cos\theta + (A-B)z_c\sin\theta\sin\varphi]\sin\theta\cos\varphi$$

$$c_{22} = -(A-B)z_c\sin2\varphi$$

$$c_{12} = (A-B)z_c\sin\theta\cos2\varphi - (B-C)x_c\cos\theta\sin\varphi$$

$$c_{13} = (B-C)x_c\sin\theta\cos\varphi, c_{23} = -(B-C)x_c\sin\varphi$$

$$c_0 = 2x_c(\sin\varphi/\sin\theta)Q_\psi + 2x_c\cos\varphi Q_\theta + 2(z_c - x_c\sin\varphi\cot\theta)Q_\varphi$$

并且

$$Q_\psi = -\frac{\partial V}{\partial\psi}, Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial\theta}, Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial\varphi} \tag{4.5.8}$$

而 $V = V(\psi,\theta,\varphi)$ 为势能。在变量 $\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi},\psi,\theta,\varphi$ 空间中,方程式(4.5.5)确定曲面 Ω,它就是方程组(4.5.3)的积分。此时,Φ 就是对此曲面的 Еругин 函数,即

$$\Phi|_\Omega = 0$$

由方程式(4.5.5)按公式

$$\dot{\varphi} = -\frac{a}{c}\dot{\psi} - \frac{b}{c}\dot{\theta}$$

消去 $\dot{\varphi}$,并将其代入式(4.5.7),得到

$$h_{11}\dot{\psi}^2 + 2h_{12}\dot{\psi}\dot{\theta} + h_{22}\dot{\theta}^2 + h_0 = 0 \tag{4.5.9}$$

其中

$$h_{11} = -\frac{1}{2Cz_c}H\sin^2\theta\sin2\varphi$$

$$h_{12} = -\frac{1}{2Cz_c}H\sin\theta\cos2\varphi$$

$$h_{22} = \frac{1}{2Cz_c}H\sin2\varphi$$

$$h_0 = c_0$$

因式(4.5.9)对 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 是恒等式，那么令其系数等于零，就得到存在 Hess 积分必须满足的关系

$$x_c\sqrt{A(B-C)} - z_c\sqrt{C(A-B)} = 0 \quad (A > B > C) \tag{4.5.10}$$

这意味着，刚体质心在固定点处旋转椭球的一个圆截面的垂线上。令自由项 h_0 为零，根据式(4.5.8)得到为确定未知函数 $V(\psi,\theta,\varphi)$ 的下述线性偏微分方程

$$x_c\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\psi} + x_c\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\theta} + (z_c\sin\theta - x_c\sin\varphi\cos\theta)\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0 \tag{4.5.11}$$

由此确定 V 为

$$V = K(\lambda_1,\lambda_2) \tag{4.5.12}$$

这里 K 为任意函数，$\lambda_i(\psi,\theta,\varphi) =$ 常数$(i = 1,2)$为相应特征方程的积分。注意到，均匀重力场势能有如下形式，即

$$V = Mg(x_c\sin\theta\sin\varphi + y_c\sin\theta\cos\varphi + z_c\cos\theta) \tag{4.5.13}$$

式中：M 为刚体质量；g 为重力加速度，在条件

$$y_c = 0 \tag{4.5.14}$$

下，满足方程式(4.5.11)。关系式(4.5.10)和式(4.5.14)确定重刚体运动方程的一个可积情形，即 Hess-Аппельрот 情形。

还要注意到，刚体在 Newton 中心力场中的势能（在离引力中心足够远的前提下）是 $V = V_0 + V_1$，其中 V_0 与表达式(4.5.13)重合，而 V_1 有

$$V_1 = \frac{3g}{2R}(A\sin^2\theta\sin^2\varphi + B\sin^2\theta\cos^2\varphi + C\cos^2\theta)$$

(4.5.15)

容易验证,在此情形,函数 V 在 $A \neq B, x_c \neq 0, z_c \neq 0$ 下不是方程式(4.5.11)的解,因此,无附加关系的积分式(4.5.4)不存在。因此,刚体运动方程的 Hess-Аппельрот 可积情形,在 Newton 中心引力场中没有类似。

参考文献

[1] 梅凤翔. 刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社,1991.

[2] Харламов П В. Лекции по Динамике Твёрдого Тела. Новосибирск: Изд – во Новосибир. Ун – та, 1965.

[3] Архангельский Ю А. Аналитическая Динамика Твёрдого Тела. Москва: Наука, 1977.

[4] Галиуллин А С. Методы Решения Обратных Задач Динамики. Москва: Наука, 1986.

第 5 章 变质量动力学中的逆问题

由于航天技术的发展，变质量力学的研究显得越来越重要。在工程技术和自然界，可以举出变质量物体的许多实例。吸入空气又同时喷出燃气的喷气式飞机；投掷载荷的飞机或气球；纺织厂的纱锭在转动过程中不断改变其质量和转动惯量；陨石在大气中下落，其质量由于燃烧而减少；浮水由于冻结使其质量增加或由于溶化而使其质量减少等。

变质量质点的动力学方程是俄罗斯学者 Мещерский 于 1898 年得到的并于 1904 年发表在《彼得堡工学院报道》上[1]。这个方程被后人称为 Мещерский 方程，从而奠定了变质量动力学基础。变质量系统动力学研究质量变化物体的运动与作用其上的力之间的关系。有关变质量力学的详细内容，可见参考文献[1 – 7]。

本章研究变质量动力学中的某些逆问题，包括变质量系统动力学、变质量重质点的上升运动、变质量体的规划运动、规划运动中取驻值的泛函构造，以及 Noether 对称性与动力学逆问题等。

5.1 变质量系统动力学

本节讨论变质量系统动力学的某些问题，包括 Мещерский 方程、变分原理、运动微分方程等。

5.1.1 Мещерский 方程

研究单个质点。在瞬时 t，它的质量为 m；在瞬时 $t + \mathrm{d}t$，由质点分离（或并入）的微粒的质量为 $\mathrm{d}m$。描述变质量质点的运动用如下 Мещерский 方程，即

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} \tag{5.1.1}$$

式中:$\ddot{\boldsymbol{r}}$ 为质点的加速度;$\boldsymbol{F}$ 为作用在质点上所有力的合力;$\boldsymbol{R}$ 为反推力,即

$$\boldsymbol{R} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} \tag{5.1.2}$$

式中:$\boldsymbol{u}$ 为由质点分离(或并入)的微粒相对于质点本身的速度。

对于由 N 个变质量质点组成的力学系统,可对每个质点列写 Мещерский 方程

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.3}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i \tag{5.1.4}$$

对于有多个质点并受有约束的变质量力学系统,应用方程式(5.1.3)、式(5.1.4) 来研究动力学问题是很不方便的。因此,需要建立变质量系统的分析力学框架,如参考文献[4,6,7] 表述的。

5.1.2 D'Alembert-Lagrange 原理

现将作用在质点上的力分为主动力和约束反力

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c \tag{5.1.5}$$

式中:$\boldsymbol{F}_i^a$ 为主动力;$\boldsymbol{F}_i^c$ 为约束反力。根据D'Alembert 原理,将方程式(5.1.3) 表示为

$$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c + \boldsymbol{R}_i = 0 \tag{5.1.6}$$

将式(5.1.6) 点乘虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 并对 i 求和,得

$$(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c + \boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5.1.7}$$

假设系统所受约束是理想的,即有

$$\boldsymbol{F}_i^c \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5.1.8}$$

将式(5.1.8) 代入式(5.1.7),得到

$$(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.9}$$

这就是变质量力学系统的 D' Alembert-Lagrange 原理，也叫动力学普遍方程。

应用上述原理建立系统的运动微分方程，仍然不太方便，因此，需要将其表示为广义坐标形式，有[8]

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s + P_s\right)\delta q_s = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{5.1.10}$$

式中：$T = T(m_i, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ 为系统动能；Q_s 为广义力，即

$$Q_s = \boldsymbol{F}_i^a \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N; s = 1,2,\cdots,n) \tag{5.1.11}$$

而 P_s 为广义反推力，有

$$P_s = (\boldsymbol{R}_i + m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)$$

$$(i = 1,2,\cdots,N; s = 1,2,\cdots,n) \tag{5.1.12}$$

这里假设点的质量是广义坐标，广义速度和时间的函数为

$$m_i = m_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.13}$$

如果 m_i 仅依赖于时间 t，则有

$$P_s = (\boldsymbol{R}_i + m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \quad (i = 1,2,\cdots,N; s = 1,2,\cdots,n) \tag{5.1.14}$$

5.1.3 运动微分方程

对于受有完整约束的变质量系统，原理式(5.1.10) 中的广义虚位移 $\delta q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 是任意的，彼此独立的，因此，所有 δq_s 前的系数都等于零，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+P_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5.1.15}$$

如果质点的质量不变,则方程式(5.1.15)归结为常质量系统的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5.1.16}$$

注意到,式(5.1.15)中的动能与式(5.1.16)中的动能不一样,前者包含可变质量,而后者包含常质量。

变质量力学系统的基本原理是 D'Alembert-Lagrange 原理式(5.1.10)。变质量完整力学系统的基本运动微分方程是式(5.1.15)。

变质量系统动力学有极为丰富的内容,如变质量系统的动力学普遍定理[3,6]、变质量系统的各种类型的运动微分方程[6~8]、变质量系统的积分方法和各种专门问题[6]、系统的稳定性[7],以及系统的对称性与守恒量[9]等。

变质量系统动力学正问题是指,给定系统的 Lagrange 函数 L、广义力 Q_s 以及质量的变化规律来求系统的运动性质(积分),甚至求得最终的解。

5.2 变质量重质点的上升运动

本节研究变质量重质点的上升运动,适当选择质量变化规律和质量变化速度使得给定运动是质点的一个可能的运动并且运动是稳定的。

5.2.1 问题的提出

变质量重质点动力学逆问题有如下提法:确定质量变化规律 $m=m(t)$ 以及变质量重质点可变质量的速度 $u=u(t)$,使得在铅垂平面上给定的上升运动

$$y = \varphi(t), z = \psi(t), \lim_{t\to\infty}\psi(t) = \infty, \dot{\varphi}(t) \neq 0, \dot{\psi}(t) \neq 0 \tag{5.2.1}$$

是一个可能运动,并且是稳定的。

根据 Мещерский 方程式(5.1.1),列写变质量质点在平方阻尼下的运动方程,有

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= \dot{m}(\mu - 1)\dot{y} - k_1 v\dot{y} - k_2 v\dot{z} \\ m\ddot{z} &= \dot{m}(\eta - 1)\dot{z} - k_1 v\dot{z} + k_2 v\dot{y} - mg \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

式中:$\mu = \mu(t), \eta = \eta(t)$ 是质量变化速度 $\boldsymbol{u}$ 和质点本身速度 $\boldsymbol{v}$ 在坐标轴上投影之比;$k_1 v^2$ 和 $k_2 v^2$ 为介质阻力在轨道切向和法向分量;$k_1 = k_1(t), k_2 = k_2(t)$ 是平方规律的阻尼系数,并且满足条件

$$\lim_{t\to\infty} k_1(t) = 0, \lim_{t\to\infty} k_2(t) = 0 \tag{5.2.3}$$

将式(5.2.1)代入方程式(5.2.2),得到存在给定运动式(5.2.1)的必要条件,有

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}}{m}(\mu - 1) &= \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + \frac{k_1\dot{\varphi} + k_2\dot{\psi}}{m\dot{\varphi}} v_0 \\ \frac{\dot{m}}{m}(\eta - 1) &= \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{g}{\dot{\psi}} + \frac{k_1\dot{\psi} - k_2\dot{\varphi}}{m\dot{\psi}} v_0 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

其中

$$v_0 = (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)^{1/2}$$

为点在给定运动式(5.2.1)中的速度大小。由此得知,如果给定函数 $\varphi(t), \psi(t)$,那么,待求参数 μ, η, m 仅由两个条件限制,这就允许对这些参数施加补充条件,就是运动式(5.2.1)为稳定的条件。

5.2.2 稳定运动的条件

现在确定变质量重质点给定运动式(5.2.1)对坐标和速度为

稳定的条件。取给定运动为未扰运动,并令

$$y = \varphi + x_3, z = \psi + x_4, \dot{y} = \dot{\varphi} + x_1, \dot{z} = \dot{\psi} + x_2$$

将其代入方程式(5.2.2),并利用关系式(5.2.4),得到扰动运动方程[10]

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} - \frac{k_1\dot{\varphi}^3 - k_2\dot{\psi}^3}{mv_0\dot{\varphi}}\right)x_1 - \frac{k_1\dot{\varphi}\dot{\psi} + k_2\dot{\varphi}^2 + 2k_2\dot{\psi}^2}{mv_0}x_2 + X_1^{(2)}(x_1, x_2, t)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1\dot{\varphi}\dot{\psi} - k_2\dot{\psi}^2 - 2k_2\dot{\varphi}^2}{mv_0}x_1 + \left(\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{g}{\dot{\psi}} - \frac{k_1\dot{\psi}^3 + k_2\dot{\varphi}^3}{mv_0\dot{\psi}}\right)x_2 + X_2^{(2)}(x_1, x_2, t)$$

$$\dot{x}_3 = x_1, \dot{x}_4 = x_2 \tag{5.2.5}$$

式中:x_1, x_2 为点的速度在坐标轴上投影的扰动;x_3, x_4 为点的坐标的扰动;$X_1^{(2)}, X_2^{(2)}$ 为从不低于二阶项开始的按 x_1, x_2 幂展开的函数。进而,假设方程式(5.2.5)中 x_1, x_2 的各阶系数在 $t \geqslant t_0$ 时是有界的、连续的。为此,只要函数 $\ddot{\varphi}, \ddot{\psi}$,以及

$$\frac{k_i}{m}\dot{\varphi}^{n+1-\nu}\dot{\psi}^{\nu}, \frac{k_i}{m}\dot{\varphi}^{\nu}\dot{\psi}^{n+1-\nu} \quad (i = 1,2; n,\nu \text{ 为自然数})$$

满足所指条件。

研究对点的速度投影扰动的一次近似方程

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} - \frac{k_1\dot{\varphi}^3 - k_2\dot{\psi}^3}{mv_0\dot{\varphi}}\right)x_1 - \frac{k_1\dot{\varphi}\dot{\psi} + k_2\dot{\varphi}^2 + 2k_2\dot{\psi}^2}{mv_0}x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1\dot{\varphi}\dot{\psi} - k_2\dot{\psi}^2 - 2k_2\dot{\varphi}^2}{mv_0}x_1 + \left(\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{g}{\dot{\psi}} - \frac{k_1\dot{\psi}^3 + k_2\dot{\varphi}^3}{mv_0\dot{\psi}}\right)x_2 \tag{5.2.6}$$

根据假设式(5.2.3),当 $t \to \infty$ 时,方程组(5.2.6)中第一个方程 x_2 前的系数和第二个方程 x_1 前的系数,应趋于零,即有

$$\lim_{t\to\infty}p_{12}(t)=\lim_{t\to\infty}p_{21}(t)=0$$

因此,方程组(5.2.6)是几乎对角的。由3.1节中命题4可知,如果$t\geqslant t_0$满足不等式

$$p_{11}(t)\geqslant p_{22}(t)+\varepsilon$$

即

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}-\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}-\frac{g}{\dot{\psi}}+\frac{k_1(\dot{\psi}^2-\dot{\varphi}^2)\dot{\varphi}\dot{\psi}+k_2(\dot{\varphi}^4+\dot{\psi}^4)}{mv_0\dot{\varphi}\dot{\psi}}>\varepsilon>0$$

按关系式(5.2.4),上式可写成

$$k_1(\dot{\psi}^2-\dot{\varphi}^2)-2k_2\dot{\varphi}\dot{\psi}+\dot{m}(\mu-\eta)v_0>\varepsilon>0 \quad (5.2.7)$$

这里ε是任意小的正数,那么方程组(5.2.6)的解的特征数表示为

$$\chi_1=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}-\frac{k_1\dot{\varphi}^3-k_2\dot{\psi}^3}{mv_0\dot{\varphi}}\right)\mathrm{d}t=$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\left(\ln\dot{\varphi}-\int_{t_0}^{t}\frac{k_1\dot{\varphi}^3-k_2\dot{\psi}^3}{mv_0\dot{\varphi}}\mathrm{d}t\right) \quad (5.2.8)$$

$$\chi_2=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\left(\ln\dot{\psi}-\int_{t_0}^{t}\frac{k_1\dot{\psi}^3+k_2\dot{\varphi}^3}{mv_0\dot{\psi}}\mathrm{d}t+g\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{\dot{\psi}}\right)$$

根据不等式(5.2.7),有

$$\chi_1<\chi_2 \quad (5.2.9)$$

假设特征数χ_1,χ_2是严格的,此时方程组(5.2.6)是规则的,这可由以下等式验证

$$\chi_1+\chi_2=\chi\left(\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}P\mathrm{d}t\right) \quad (5.2.10)$$

其中$\mathrm{tr}P$为方程组(5.2.6)系数矩阵的迹,即对角元素之和。因此,如果对条件式(5.2.7)再补充方程组(5.2.6)解的特征数的正性要求

$$\chi_1>0$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\varphi}{t} < \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\frac{k_1\dot{\varphi}^3 - k_2\dot{\psi}^3}{mv_0\dot{\varphi}}dt \tag{5.2.11}$$

那么,由3.1节中命题13可知,给定运动式(5.2.1)对点的速度投影来说是稳定的,并且因点的速度投影扰动带正的特征数,这种稳定性还是渐近的。这表明,据方程

$$\dot{x}_3 = x_1, \dot{x}_4 = x_2 \tag{5.2.12}$$

对坐标的稳定性得以保证。

综上所述,按照条件式(5.2.4)、式(5.2.7)和式(5.2.11)来选取质量变化规律和质量变化速度时,给定运动式(5.2.1)将是变质量重质点的一个可能的运动,并且这个运动对速度和坐标来说是稳定的。

5.3 变质量体的规划运动

本节讨论变质量体的规划运动,包括变质量体运动的自然方程、变质量体在直线轨道上的稳定性以及在曲线轨道上的稳定性等。

5.3.1 变质量体运动的自然方程

研究质量 $m = m(t)$ 的重刚体,其质心在铅垂平面内完成规划运动

$$\xi_0 = \xi_0(t), \eta_0 = \eta_0(t) \tag{5.3.1}$$

假设重刚体质心和惯性主轴的方向,在其质量变化过程中,相对刚体的原始几何形状是不变的。取坐标轴 Ox_1, Ox_2, Ox_3 作为主中心惯性轴,设 $A = A(t), B = B(t), C = C(t)$ 为刚体的相应惯性矩。假设变质量体有动力对称轴,它相对刚体原始几何形状是不变的,而轴 Oz_1 沿此轴,因此有 $A(t) = B(t)$。设 p, q, r 为刚体瞬时角速度 ω 在轴 Ox_1, Oy_1, Oz_1 上的投影。再引进一直角坐标系 $Oxyz$,与刚

体质心的轨道相连，且轴 Oz 指向轨道切线，轴 Oy 沿主法线，而轴 Ox 沿副法线。当物体运动时，三面角 $Oxyz$ 绕轴 Ox 以角速度 $\boldsymbol{P} = \dot{\tau}$ 转动，这里 τ 为轨道切线对水平面的倾角。假设物体在某阻尼介质中运动，介质对变质量体的作用用主矢 $\boldsymbol{R}$ 和对质心的主矩 $\boldsymbol{M}_c$ 来表示。由质心沿轴 Oz_1 引出单位矢量 $\boldsymbol{c}$，并沿着轴 Oz_1 和瞬轴组成平面与赤道平面 Ox_1y_1 的交线引出单位矢量 $\boldsymbol{e}$。这时，有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_e \boldsymbol{e} + r\boldsymbol{c} \tag{5.3.2}$$

对物体质心计算的动量矩矢量为

$$\boldsymbol{G} = A\omega_e \boldsymbol{e} + Cr\boldsymbol{c} \tag{5.3.3}$$

或

$$\boldsymbol{G} = A\boldsymbol{\omega} + (C - A)r\boldsymbol{c} \tag{5.3.4}$$

注意到

$$\boldsymbol{\omega} = r\boldsymbol{c} - (\dot{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{c}) \tag{5.3.5}$$

因此，由式(5.3.3)得

$$\boldsymbol{G} = Cr\boldsymbol{c} - A(\dot{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{c}) \tag{5.3.6}$$

根据变质量体的动量矩定理[3,6]，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cr\boldsymbol{c}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(\dot{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{M}_c + \boldsymbol{M}_p^a + \boldsymbol{M}_u \tag{5.3.7}$$

式中：$\boldsymbol{M}_p^a$ 为保证变质量微粒的绝对运动的反推力矩之和；$\boldsymbol{M}_u$ 为这些微粒相对运动的所有惯性力矩之和。方程式(5.3.7)可写成

$$C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{c}) - A(\ddot{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{M}_c + \boldsymbol{M}_p^r + \boldsymbol{M}_u \tag{5.3.8}$$

式中：$\boldsymbol{M}_p^r$ 为保证变质量微粒的相对运动的反推力矩之和。

设 x,y,z 为矢量 $\boldsymbol{c}$ 端在与质心轨道固联的坐标系中的坐标，即

$$\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

式中：$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为轴 Ox,Oy,Oz 方向单位矢量，于是，有

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} + \dot{\tau}\boldsymbol{i} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) =$$

$$\dot{x}\boldsymbol{i} + (\dot{y} - \dot{\tau}z)\boldsymbol{j} + (\dot{z} + \dot{\tau}y)\boldsymbol{k}$$

$$\ddot{\boldsymbol{c}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + (\ddot{y} - \ddot{\tau}z - 2\dot{\tau}\dot{z} - \dot{\tau}^2 y)\boldsymbol{j} + (\ddot{z} + \ddot{\tau}y + 2\dot{\tau}\dot{y} - \dot{\tau}^2 z)\boldsymbol{k}$$

$$\ddot{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{c} = (\ddot{y}z - y\ddot{z} - 2\dot{\tau}y\dot{y} - 2\dot{\tau}z\dot{z} - \ddot{\tau}y^2 - \ddot{\tau}z^2)\boldsymbol{i} + (\ddot{z}x - z\ddot{x} - 2\dot{\tau}x\dot{y} - \dot{\tau}^2 xz + \ddot{\tau}xy)\boldsymbol{j} + (\ddot{x}y - x\ddot{y} - 2\dot{\tau}x\dot{z} + \dot{\tau}^2 xy + \ddot{\tau}xz)\boldsymbol{k}$$

将 $\dot{\boldsymbol{c}}$ 及 $\ddot{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{c}$ 代入方程式(5.3.8),得到投影方程

$$C(rx)^{\cdot} - A(\ddot{y}z - y\ddot{z} - 2\dot{\tau}y\dot{y} - 2\dot{\tau}z\dot{z} - \ddot{\tau}z^2 - \ddot{\tau}z^2) = M_{cx} + M_{px}^r + M_{ux}$$

$$C[(ry)^{\cdot} - \dot{\tau}rz] - A(\ddot{z}x - z\ddot{x} - 2\dot{\tau}x\dot{y} - \dot{\tau}^2 xz + \ddot{\tau}xy) = M_{cy} + M_{py}^r + M_{uy}$$

$$C[(rz)^{\cdot} - \dot{\tau}ry] - A(\ddot{x}y - x\ddot{y} + 2\dot{\tau}xz + \dot{\tau}^2 xy + \ddot{\tau}xz) = M_{cz} + M_{pz}^r + M_{uz} \tag{5.3.9}$$

假设阻尼介质对物体的总作用,用力 $\boldsymbol{R}(v,\eta)$ 表示,其中 $v = (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)^{1/2}$ 为质心速度,此力作用在 Oz_1 上的点 D(压力中心)距 O 为 l 处,并在平面 Ozz_1 内与 Oz_1 成角 δ,而平面 Ozz_1 对铅垂面倾斜 ψ 角。此时,力对质心的矩 $\boldsymbol{M}$ 与轴 Ox 成角 ψ,其值为

$$M = Rl\sin\delta \tag{5.3.10}$$

或

$$M = Rfl\sin\alpha$$

其中

$$f = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$$

并设 f 仅依赖于物体的几何形状,α 为轴 Oz_1 对轨道切线的倾角(攻角)。注意到

$$x = \sin\alpha\sin\psi, y = -\sin\alpha\cos\psi, z = \cos\alpha \tag{5.3.11}$$

而

$$M_x = -Rfly, M_y = Rflx, M_z = 0 \tag{5.3.12}$$

研究如下情形，此时在物体质心上，确保物体质量变化和变质量微粒的相对运动的所有力，以及介质作用在物体上的力的矩之和，在所有运动过程中，归结为这样一个矩 **M**。此时，物体自旋（绕轴 Oz_1）的阻力矩，与反推力及微粒相对运动的惯性力的矩之和相平衡，因此，有

$$r = \text{常数}$$

在所论情形，方程式(5.3.9) 有形式

$$\begin{aligned}
&Cr\dot{x} - A(\ddot{y}z - y\ddot{z} - 2\dot{\tau}y\dot{y} - 2\dot{\tau}z\dot{z} - \ddot{\tau}y^2 - \ddot{\tau}z^2) = Rfly \\
&Cr\dot{y} - A(\ddot{z}x - z\ddot{x} + 2\dot{\tau}x\dot{y} - \dot{\tau}^2 x\dot{z} + \ddot{\tau}xy) - Cr\dot{\tau}z = Rfly \\
&Cr\dot{z} - A(\ddot{x}y - x\ddot{y} + 2\dot{\tau}x\dot{z} + \dot{\tau}^2 xy + \ddot{\tau}xz) + Cr\dot{\tau}y = 0
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

借助轴 Oz_1 在由质心引出的单位球面（矢量 **c** 端点的）上的迹的纬度 β 和经度 γ 来确定物体相对坐标系 $Oxyz$ 的位置，并且 γ 是轴 Oz_1 与其在平面 Oyz 上投影所成的角，β 是轴 Oz_1 在平面 Oxz 上投影与轴 Oz 间的夹角。此时，矢量 **c** 端用这两个角表示为

$$x = \sin\gamma, y = -\sin\beta\cos\gamma, z = \cos\beta\cos\gamma \tag{5.3.14}$$

在坐标变换后，方程式(5.3.13) 的前两个方程成为[10]

$$\begin{aligned}
&A(\ddot{\beta} + \ddot{\tau})\cos\gamma - 2A(\dot{\beta} + \dot{\tau})\dot{\gamma}\sin\gamma + Cr\dot{\gamma} = Rfl\sin\beta \\
&A\ddot{\gamma} - Cr(\dot{\beta} + \dot{\tau})\cos\gamma + A(\dot{\beta} + \dot{\tau})^2\sin\gamma\cos\gamma = Rfl\cos\beta\sin\gamma
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

第三个方程因式(5.3.15) 而成为恒等式。常质量长圆形炮弹的旋转运动方程也有形式式(5.3.15)。

假设变质量体的规划运动由质量 $m(\dot{m}(t) < 0)$ 变化所建立的总反推力 **T** 的大小和方向的相应改变来实现。因此，为实现规划运动所必要的力 **T**（牵引力）的量值和方向，应该满足物体质心的运动方程。这些方程确定出现于物体转动运动方程式(5.3.15) 右端的介质阻力 **R** 的规划值。

5.3.2 变质量体在直线轨道上的稳定性

假设变质量体的质心沿某一直线运动，且量 $a = Rfl$ 在整个运动过程中保持为常数。将 $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ 代入方程式(5.3.15)，得到

$$
\begin{aligned}
A\ddot{\beta}\cos\gamma - 2A\dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\gamma + Cr\dot{\gamma} &= a\sin\beta \\
A\ddot{\gamma} + A\dot{\beta}^2\sin\gamma\cos\gamma - Cr\dot{\beta}\cos\gamma &= a\cos\beta\sin\gamma
\end{aligned}
\tag{5.3.16}
$$

方程式(5.3.16)有平凡解 $\beta = 0, \gamma = 0$，并可作为变质量体相对角 β, γ 的扰动方程来研究。

现在用 Ляпунов V 函数法研究稳定性。构造函数

$$
V = \frac{1}{2}AC\dot{\beta}^2 + 2aA\dot{\beta}\gamma + \frac{1}{2}Car\gamma^2 + \frac{1}{2}ACr\dot{\gamma}^2 - 2aAB\dot{\gamma} + \frac{1}{2}Car\beta^2 \tag{5.3.17}
$$

当

$$
C^2r^2 - 4aA > \varepsilon > 0 \tag{5.3.18}
$$

时，V 是正定的，并有无限小上界(A、C 为时间 t 的有界非零函数，ε 为某小的正数)。将 V 对时间 t 求导数，得

$$
\dot{V} = W_1 + W_2 + W_3 \tag{5.3.19}
$$

其中

$$
W_1 = ACr(\dot{\beta}\ddot{\beta} + \dot{\gamma}\ddot{\gamma}) + 2aA(\ddot{\beta}\gamma - \beta\ddot{\gamma}) + Car(\beta\dot{\beta} + \gamma\dot{\gamma})
$$

$$
W_2 = \frac{1}{2}(AC)^{\cdot}\, r\dot{\beta}^2 + 2\dot{A}\dot{B}a\gamma + \frac{1}{2}\dot{C}ar\gamma^2
$$

$$
W_3 = \frac{1}{2}(AC)^{\cdot}\, r\dot{\gamma}^2 - 2\dot{A}\dot{\gamma}a\beta + \frac{1}{2}\dot{C}ar\beta^2
$$

当 A 和 C 不变时，方程式(5.3.16)有以下两个第一积分

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}A(\dot{\gamma}^2 + \dot{\beta}^2\cos^2\gamma) + a\cos\beta\cos\gamma &= h \\
A(\dot{\gamma}\sin\beta - \dot{\beta}\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma) + Cr\cos\beta\cos\gamma &= k
\end{aligned}
\tag{5.3.20}
$$

这两个积分代表能量积分和动量矩积分。将积分式(5.3.20)表示为如下形式,即

$$\frac{1}{2}A(\dot{\gamma}^2+\dot{\beta}^2)+a\left(1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)=V_1^{(4)}+h$$

$$A(\beta\dot{\gamma}-\dot{\beta}\gamma)+Cr\left(1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)=V_2^{(4)}+k \tag{5.3.21}$$

其中 $V_1^{(4)}, V_2^{(4)}$ 是全纯函数,其对 $\beta,\gamma,\dot{\beta},\dot{\gamma}$ 幂展开式中从不低于四次项开始。将式(5.3.21)对时间 t 求导数,仍假定 A,C 不变,得到

$$\begin{aligned} A(\dot{\beta}\ddot{\beta}+\dot{\gamma}\ddot{\gamma})-a(\beta\dot{\beta}+\gamma\dot{\gamma})&=W_1^{(3)} \\ A(\beta\ddot{\gamma}-\ddot{\beta}\gamma)-Cr(\beta\dot{\beta}+\gamma\dot{\gamma})&=W_2^{(3)} \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

其中 $W_1^{(3)}, W_2^{(3)}$ 为全纯函数,其对 $\beta,\gamma,\dot{\beta},\dot{\gamma}$ 幂展开式中从不低于三次项开始。注意到,式(5.3.19)中的 W_1,在 A 和 C 保持不变的前提下是 V 的导数,因此,根据由方程式(5.3.16)的第一积分式(5.3.20)得到的表达式(5.3.22),以及在 A,C 不变的前提下,有

$$W_1=CrW_1^{(3)}-2aW_2^{(3)} \tag{5.3.23}$$

因此,函数 V 按变质量体扰动方程式(5.3.16)求对时间的导数的符号,在点 $\beta=\gamma=0,\dot{\beta}=\dot{\gamma}=0$ 的充分小的领域内,由二次型 W_2+W_3 的符号来确定。

因此,如果

$$(AC)^{\cdot}\dot{C}r^2-4a\dot{A}^2>\varepsilon>0,\dot{C}<-\varepsilon \tag{5.3.24}$$

那么,函数 V 的导数,在该点领域内是负定的。联合式(5.3.18)、式(5.3.24),得到条件[10]

$$C^2r^2-4aA>\varepsilon>0,(AC)^{\cdot}\dot{C}r^2-4a\dot{A}^2>\varepsilon,\dot{C}<-\varepsilon \tag{5.3.25}$$

条件式(5.3.25)就是变质量转动物体相对动力对称轴对质心轨道直线的偏离角及相对这些角的变化速度来说,是稳定的条件。

5.3.3 变质量体在曲线轨道上的稳定条件

下面研究变质量体的质心在铅垂平面内沿规划曲线式(5.3.1)的运动。令

$$x_1 = \dot{\beta} - \dot{\beta}_0, x_2 = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0, x_3 = \beta - \beta_0, x_4 = \gamma - \gamma_0 \tag{5.3.26}$$

为纬度 β 和经度 γ 变化速度的扰动及其本身的扰动。将式(5.3.26)代入方程式(5.3.15),得

$$\begin{aligned}
&A(\dot{x}_1 + \ddot{\beta}_0 + \ddot{\tau}_0 + \cdots)(\cos\gamma_0 - x_4\sin\gamma_0 + \cdots) - \\
&2A[(x_1 + \dot{\beta}_0) + \dot{\tau}_0 + \cdots](x_2 + \dot{\gamma}_0)(\sin\gamma_0 + x_4\cos\gamma_0 + \cdots) + \\
&Cr(x_2 + \dot{\gamma}_0) = R_0 fl(\sin\beta_0 + x_3\cos\beta_0 + \cdots) \\
&A(\dot{x}_2 + \ddot{\gamma}_0) - Cr[(x_1 + \dot{\beta}_0) + \dot{\tau}_0 + \cdots](\cos\gamma_0 - \\
&x_4\sin\gamma_0 + \cdots) + A[\dot{\beta}_0^2 + \dot{\tau}_0^2 + 2\dot{\beta}_0\dot{\tau}_0 + 2x_1(\dot{\beta}_0 + \dot{\tau}_0) + \cdots] \\
&(\sin\gamma_0 + x_4\cos\gamma_0 + \cdots)(\cos\gamma_0 - x_4\sin\gamma_0 + \cdots) = \\
&R_0 fl(\cos\beta_0 - x_3\sin\beta_0 + \cdots)(\sin\gamma_0 + x_4\cos\gamma_0 + \cdots)
\end{aligned} \tag{5.3.27}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&A(\ddot{\beta}_0 + \ddot{\tau}_0)\cos\gamma_0 - 2A(\dot{\beta}_0 + \dot{\tau}_0)\dot{\gamma}_0\sin\gamma_0 + Cr\dot{\gamma}_0 = R_0 fl\sin\beta_0 \\
&A\ddot{\gamma}_0 - Cr(\dot{\beta}_0 + \dot{\tau}_0)\cos\gamma_0 + A(\dot{\beta}_0 + \dot{\tau}_0)^2\sin\gamma_0\cos\gamma_0 = \\
&R_0 fl\cos\beta_0\sin\gamma_0
\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

则方程式(5.3.27)可写成

$$\dot{x}_1 = 2\dot{\gamma}_0 x_1\tan\gamma_0 + \left[2(\dot{\beta}_0 + \dot{\tau}_0)\tan\gamma_0 - \frac{Cr}{A\cos\gamma_0}\right]x_2 +$$

$$fl\frac{R_0\cos\beta_0}{A\cos\gamma_0}x_3+[2(\dot{\beta}_0+\dot{\tau}_0)\dot{\gamma}_0+(\ddot{\beta}_0+\ddot{\tau}_0)\tan\gamma_0]x_4+X_1(x_3,x_4)$$

$$\dot{x}_2=\left[\frac{Cr}{A}-2(\dot{\beta}_0+\dot{\tau}_0)\sin\gamma_0\right]x_1\cos\gamma_0-fl\frac{R_0}{A}x_3\sin\beta_0\sin\gamma_0+$$

$$\left[fl\frac{R_0}{A}\cos\beta_0\cos\gamma_0-\frac{Cr}{A}(\dot{\beta}_0+\dot{\tau}_0)\sin\gamma_0-\right.$$

$$\left.(\dot{\beta}_0+\dot{\tau}_0)^2\cos2\gamma_0\right]x_4+X_2(x_3,x_4) \tag{5.3.29}$$

其中 $X_1(x_3,x_4)$,$X_2(x_3,x_4)$ 为全纯函数,其按 x_3,x_4 幂的展开式从不低于一次项开始。由式(5.3.26),显然有

$$\dot{x}_3=x_1,\dot{x}_4=x_2 \tag{5.3.30}$$

这样,方程式(5.3.29)和式(5.3.30)组成扰动运动方程组。自然要假设规划运动应如此选取,以使在整个运动过程中 β_0,γ_0 充分小,并且物体动力对称轴以充分小的角速度 $\dot{\beta}_0,\dot{\gamma}_0$ 而运动。因此,由规划运动式(5.3.1)确定的转动运动相对 $\beta,\gamma,\dot{\beta},\dot{\gamma}$ 稳定的充分条件,就是物体在曲线轨道上的运动在动力对称轴与轨道切线所成角很小以及这个角变化速度很小意义下是稳定的充分条件。

未扰运动 $\beta=\beta_0,\gamma=\gamma_0,\dot{\beta}=\dot{\beta}_0,\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0$ 的稳定性条件可以求得,例如,借助函数

$$V=\frac{1}{2}ACrx_1^2+2AflR_0x_1x_4+\frac{1}{2}CrflR_0x_4^2+$$

$$\frac{1}{2}ACrx_2^2-2AflR_0x_2x_3+\frac{1}{2}CrflR_0x_3^2 \tag{5.3.31}$$

它在条件

$$C^2r^2-4AflR_0>\varepsilon>0 \tag{5.3.32}$$

下是正定的,并有无限小上界(A、C 为时间的有界非零函数,ε 为某小正数)。二次型 V 按扰动运动方程式(5.3.29)、式(5.3.30)所求时间导数的符号,在充分小的 $\beta_0,\gamma_0,\dot{\beta}_0,\dot{\gamma}_0$ 下,由相应二次型

的符号来确定。这个型的负定条件，因 $\beta_0,\gamma_0,\dot{\beta}_0,\dot{\gamma}_0$ 是小量，由下述不等式确定，即

$$\Delta_1 > \varepsilon > 0, \Delta_1^2 > r^2\dot{\tau}_0^4[(AC)^2\Delta_1 + 4\Delta_2^2], (AC)^{\cdot} < -\varepsilon \tag{5.3.33}$$

其中

$$\Delta_1 = r^2(AC)^{\cdot}(CflR_0)^{\cdot} - 4[(AflR_0)^{\cdot}]^2$$

$$\Delta_2 = AflR_0(AC)^{\cdot} - AC(AflR_0)^{\cdot}$$

满足这些条件，就可保证变质量体旋转运动相对动力对称轴对质心轨道切线偏离角度以及相对这些角度的变化速度是稳定的，前提是这些偏角及其变化速度在规划运动本身中充分小。

当 $\tau_0 = 0$ 时，由式(5.3.32)、式(5.3.33)可直接得到变质量体在直线规划轨道上运动的稳定性条件式(5.3.25)。

5.4 变质量质点在规划运动中取驻值的泛函的构造

本节讨论变质量质点动力学的两类逆问题，包括变质量质点按给定规律的运动，以及带有给定性质的变质量质点的运动。

5.4.1 变质量质点按给定规律的运动

研究变质量重质点的下述动力学逆问题[10]：设质量为 $m(t)$ 的变质量重质点的运动规律（运动规划）为沿铅垂面内的抛物线，即

$$\Omega: y(t) = \dot{y}_0 t, z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t \tag{5.4.1}$$

式中：$y(t),z(t)$ 为质点在规划运动中的水平坐标和高度；$\dot{y}_0,\dot{z}_0$ 为在 $t = 0$ 时质点在规划运动中速度在 Oy,Oz 轴上的投影。试确定反推力 $\boldsymbol{T}$，在此力作用下质点在阻尼介质中按给定规律式(5.4.1)

而运动，并建立此时取驻值的泛函。

所论变质量重质点在铅垂平面内的运动方程，在考虑介质阻力 $\boldsymbol{R} = (v,z)$ 时，有

$$m\ddot{y} = T\frac{\dot{y}}{v} - R(v,z)\frac{\dot{y}}{v}, m\ddot{z} = T\frac{\dot{z}}{v} - R(v,z)\frac{\dot{z}}{v} - mg \tag{5.4.2}$$

另一方面，具有给定特解式(5.4.1)的方程组应有如下形式，即

$$\ddot{y} = (\dot{y}_0 t)^{\cdot\cdot} + \Phi_1, \ddot{z} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t\right)^{\cdot\cdot} + \Phi_2$$

即

$$\ddot{y} = \Phi_1, \ddot{z} = \Phi_2 - g \tag{5.4.3}$$

式中：Φ_1、Φ_2 为 Еругин 函数。由方程式(5.4.3)得

$$\Phi_1 = \frac{1}{m}(T - R)\frac{\dot{y}}{v}, \Phi_2 = \frac{1}{m}(T - R)\frac{\dot{z}}{v} \tag{5.4.4}$$

当且仅当 Еругин 函数 Φ_1 和 Φ_2 在给定解式(5.4.1)上变为零时，所建立的方程式(5.4.3)才允许有此解。因此，在整个运动过程中成立等式

$$T = \boldsymbol{R}(v,z) \tag{5.4.5}$$

的条件下，给定运动式(5.4.1)才存在。注意到，此时规划运动式(5.4.1)仅存在于如下情形：点的初始位置和初始速度与其在规划运动中的相重合，否则，点将沿着与规划抛物线不一致的抛物线而运动，即规划运动的不稳定性。

在方程式(5.4.3)的解上，包括给定运动式(5.4.1)在内，取驻值的泛函式(3.2.42)在此情形有如下形式，即

$$J[y,z] = \int_{t_0}^{t}[F_0(y,z,t) + F_1(\dot{y},t) + F_2(\dot{z},t)]\mathrm{d}t \tag{5.4.6}$$

其中函数 F_0、F_1 和 F_2 满足等式

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial \dot{y}\partial t} &= \frac{1}{m}(T - R)\frac{\dot{y}}{v}\frac{\partial^2 F_1}{\partial \dot{y}^2} \\ \frac{\partial F_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial \dot{z}\partial t} &= \left[\frac{1}{m}(T - R)\frac{\dot{z}}{v} - g\right]\frac{\partial^2 F_1}{\partial \dot{z}^2}\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

如取

$$F_0 = F_2 = 0, F_1 = \frac{1}{2}\dot{y}^2$$

那么式(5.4.7)在规划运动式(5.4.1)上满足。因此,变质量重质点的规划运动式(5.4.1),在条件式(5.4.5)下是可能的,此时积分

$$J = \int_{t_0}^{t} \dot{y}^2 \mathrm{d}t$$

具有驻值。

5.4.2 带给定性质的变质量质点的运动

研究如下逆问题[10]:质量为 $m(t)$ 的变质量重质点在铅垂平面(规划运动的)上的给定性质为

$$\Omega: \begin{cases}\omega_1 = \dot{y} - ay - \dot{y}_0 = 0 \\ \omega_2 = \dot{z} - az - \dot{z}_0 + gt = 0\end{cases} \tag{5.4.8}$$

式中:y,z 为水平距离和高度;$\dot{y}_0,\dot{z}_0$ 为点的速度 $\boldsymbol{v}$ 在规划运动中在坐标轴 Oy,Oz 上的初始($t = 0$)投影;a 为某常数。试确定反推力 $\boldsymbol{T}$,在此力作用下变质量重质点以给定性质式(5.4.8)的运动是其在阻尼介质中的可能运动,并建立此时取驻值的泛函。

为此上述逆问题,首先组建使给定运动性质式(5.4.8)是特殊积分的方程组,有

$$\ddot{y} = a\dot{y} + \Phi_1, \ddot{z} = a\dot{z} - g + \Phi_2 \tag{5.4.9}$$

将此方程组与变质量重质点在考虑到介质阻力 $\boldsymbol{R}(v,z)$ 时的已知运动方程式(5.4.2)作比较,得到

$$\Phi_1 = \frac{1}{m}(T - R - amv)\ \frac{\dot{y}}{v}, \Phi_2 = \frac{1}{m}(T - R - amv)\ \frac{\dot{z}}{v} \tag{5.4.10}$$

由 Еругин 函数 Φ_1 和 Φ_2 在规划运动式(5.4.8)中变为零的条件，求出在运动过程中反推力的值为

$$T = R + amv \tag{5.4.11}$$

在所论情形，取驻值的泛函写成

$$J[y,z] = \int_{t_0}^{t} F(y,z,\dot{y},\dot{z})\mathrm{d}t \tag{5.4.12}$$

其中被积函数满足等式

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - ay - \dot{y}_0, \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = \dot{z} - az - \dot{z}_0 + gt$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{m}(T - R - amv)\ \frac{\dot{y}}{v}, \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{m}(T - R - amv)\ \frac{\dot{z}}{v} \tag{5.4.13}$$

如 F = 常数，则式(5.4.13)在点的规划运动中满足。由此得知，在规划运动式(5.4.8)中，变质量重质点在铅垂平面内由一点向另一点的最快过渡的必要条件满足。

最后注意到，在对反推力和介质阻力的附加假设下，可得到规划运动的稳定性结论。例如，如果这些力在变质量重质点在铅垂平面上的所有可能运动中满足式(5.4.11)，那么相应的扰动方程式(3.2.58)写成

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \dot{\omega}_2 = 0 \tag{5.4.14}$$

因此，运动对规划式(5.4.8)本身的稳定性成立。此时，由运动方程式(5.4.9)直接得知，如果 $a < 0$，那么规划运动式(5.4.8)对质点的坐标是稳定的。

5.5 变质量系统Noether对称性与动力学逆问题

本节研究变质量完整力学系统的 Noether 对称性以及与其相关的动力学逆问题。

5.5.1 变质量完整系统的 Noether 对称性

取时间和广义坐标的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,2,\cdots,n)$$

(5.5.1)

如果无限小生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N 满足如下广义 Noether 等式，即

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + (Q_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n)$$

(5.5.2)

则相应的对称性为变质量系统式(5.1.15)的 Noether 对称性。

与 Noether 对称性相应的 Killing 方程为[9,11]

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + (Q_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\frac{\partial G_N}{\partial t} - \frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad (s,k = 1,2,\cdots,n)$$

(5.5.3)

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k} \quad (s,k = 1,2,\cdots,n)$$

(5.5.4)

如果生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N 满足 Killing 方程式(5.5.3)、式(5.5.4)，则相应对称性为变质量系统式(5.1.15)的 Noether 对称性。

由 Noether 对称性可找到 Noether 守恒量[9,11]

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = 常数 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{5.5.5}$$

与 Noether 对称性相关的动力学正问题是指，由给定的动力学函数 L,Q_s,P_s 通过寻找 Noether 对称性的生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N，而求得守恒量式(5.5.5)。

5.5.2 逆问题的提法和解法

与 Noether 对称性相关的动力学逆问题有如下提法：根据变质量完整系统的一个积分

$$\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = 常数 \tag{5.5.6}$$

来求系统的 Lagrange 函数、广义力 Q_s、广义反推力 P_s 以及无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 和规范函数 G_N。

为解上述逆问题，令积分式(5.5.6)等于 Noether 守恒量式(5.5.5)，即

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \omega \tag{5.5.7}$$

Noether 逆定理给出无限小生成元[11]

$$\bar{\xi}_s = \tilde{h}_{sk}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_k} \tag{5.5.8}$$

其中

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0, \tilde{h}_{sk}h_{kr} = \delta_{sr}, h_{kr} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_r}$$

方程式(5.5.7)、式(5.5.8)联合 Noether 式(5.5.2)或 Killing 方程式(5.5.3)、式(5.5.4)，就有可能求得逆问题的解。

5.5.3 算例

已知单自由度系统的一个积分

$$\omega = m\dot{q} - \beta t v_1 \cos\alpha = \text{常数} \tag{5.5.9}$$

其中 $m = m(t)$，β、v、α 为常数。试用 Noether 方法求系统的 Lagrange 函数 L、广义力 Q、广义反推力 P，以及 Noether 对称性的生成元 ξ_0、ξ 和规范函数 G_N。

式(5.5.8) 给出

$$\bar{\xi} = \tilde{h}_{11} m \tag{5.5.10}$$

可取

$$\tilde{h}_{11} = \frac{1}{m}$$

则有

$$\bar{\xi} = 1, h_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = m$$

可取

$$\xi_0 = 0, \xi = 1, L = \frac{1}{2} m(t) \dot{q}^2 \tag{5.5.11}$$

式(5.5.7) 给出

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + G_N = m\dot{q} - \beta t v_1 \cos\alpha \tag{5.5.12}$$

由此求得

$$G_N = -\beta t v_1 \cos\alpha \tag{5.5.13}$$

式(5.5.2) 给出

$$\frac{\partial L}{\partial q} + (Q + P) + \dot{G}_N = 0 \tag{5.5.14}$$

将式(5.5.13) 代入式(5.5.14)，得

$$(Q + P) = \beta v_1 \cos\alpha \tag{5.5.15}$$

取

$$Q = 0$$

则有

$$P = \beta v_1 \cos\alpha \tag{5.5.16}$$

对比式(5.1.12),有

$$\dot{m}\boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q} = \beta v_1 \cos\alpha \tag{5.5.17}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 为微粒的绝对速度。由此,得

$$\boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q} = v_1 \cos\alpha \tag{5.5.18}$$

$$\dot{m} = \beta \tag{5.5.19}$$

积分式(5.5.19),得

$$m = m_0 + \beta t \tag{5.5.20}$$

这样,式(5.5.11)、式(5.5.13)、式(5.5.16)、式(5.5.18)、式(5.5.20)就是逆问题的一个可能解。实际上,这个问题就是运煤车变质量问题的模型:运煤车空车质量为 m_0,煤以速度 v_1 从固定漏斗落入车厢内,v_1 与水平线夹角为 α,每秒落入车厢内的质量为 β,而 q 为运煤车的水平坐标[9]。

参考文献

[1] Мещерский И В. Работы по Механике Тел Переменной Массы. Москва: Гостехиздат, 1950.

[2] Гантмахер Ф Р, Левин ЛМ. Теория Полета Неуправляемых Ракет. Москва: Физматгиз, 1959.

[3] Карагодин В М. Теоретические Основы Механики Тела Переменного Состава. Москва: Оборонгиз, 1963.

[4] Новосёлов В С. Аналитическая Механика Систем с Переменными Массами.

Ленинград: Изд - во Ленингр. Ун - та, 1969.

[5] 程勉. 变质量力学基础. 北京：人民教育出版社，1983.

[6] 杨来伍，梅凤翔. 变质量系统力学. 北京：北京理工大学出版社，1989.

[7] Ge Zhengming. Advanced Dynamics for Variable Mass Systems. Taipeh: Gaulih Book Company, 1998.

[8] 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京：北京工业学院出版社，1985.

[9] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京：北京理工大学出版社，2004.

[10] Галиуллин А С. Методы Решения Обратных Задач Динамики. Москва: Наука, 1986.

[11] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京：科学出版社，1999.

第6章 非完整动力学中的逆问题

非完整系统动力学的研究已有百年历史，发表了大量论文和专著，如参考文献[1-16]。但是，很少涉及非完整动力学逆问题。非完整动力学的正问题是指，已知系统的动能、广义力、约束方程来求非完整系统的运动规律，包括运动的性质以及最终的解。本章讨论上述问题的逆问题，包括非完整系统运动方程的构成、非完整系统运动方程的修改，以及力场的构造、广义 Poisson 方法和动力学逆问题、Bertrand 定理对非完整系统的推广、变质量非完整系统动力学逆问题、二阶非完整系统动力学逆问题等。

6.1 非完整动力学简介

受有至少一个不可积分微分约束的力学系统称为非完整系统。非完整力学可用于研究滚轮系统，如自行车、摩托车、汽车、飞机起落架等的运动。非完整力学也用于研究电机、水力机、一般链式系统(如机器人)等。本节简单介绍非完整动力学的一些结果，为下面研究动力学逆问题打下基础。

6.1.1 力学的变分原理

力学的变分原理包括微分变分原理和积分变分原理。微分变分原理包括 D'Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理、Gauss 原理等。积分变分原理包括 Hamilton 原理，Lagrange 原理等。

设力学系统由 N 个质量为 $m_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 的质点组成。D'Alembert-Lagrange 原理表示为

$$(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \qquad (6.1.1)$$

式中：$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在质点上的主动力；$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为质点的加速度；$\delta\boldsymbol{r}_i$ 为点的虚位移。这里及以后相同指标表示求和。原理式(6.1.1) 表明，对具有双面理想约束的力学系统，主动力和假想的惯性力在虚位移上所作的虚功之和等于零。引进广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 之后，原理可表示为 Euler-Lagrange 形式，即

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + Q_s\right)\delta q_s = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.1.2}$$

式中：T 为系统动能；Q_s 为广义力。

将原理式(6.1.2) 应用于非完整系统时，需给出非完整约束对广义虚位移 δq_s 的限制。于是，出现了 Appell – Четаев 定义：对非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.1.3}$$

有

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.1.4}$$

参考文献[3] 指出，对非完整系统应采用 Jourdain 原理，有

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + Q_s\right)\delta \dot{q}_s = 0 \tag{6.1.5}$$

式中：$\delta\dot{q}_s$ 为速度空间的广义虚位移。非完整约束式(6.1.3) 对 $\delta\dot{q}_s$ 的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g; s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.1.6}$$

利用原理式(6.1.2) 和限制条件式(6.1.4)，利用原理式(6.1.5) 和条件式(6.1.6)，可导出同样的运动微分方程。

一般说来，Hamilton 原理对非完整系统不是一个稳定作用量原理。

6.1.2 运动微分方程

非完整系统的运动微分方程有多种形式，如 Euler-Lagrange

体系的方程、Nielsen 体系的方程、Appell 体系的方程、混合型方程、正则方程等[11]。

非完整系统带乘子的 Lagrange 方程有如下形式,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.1.7}$$

方程式(6.1.7)与约束方程式(6.1.3)可确定非完整系统的运动,并可求出非完整约束反力。

Чаплыгин 方程有如下形式,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}$$

$$(\sigma,\nu = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.1.8}$$

其中

$$\begin{aligned} T &= T(\dot{q}_s, q_\sigma) \\ \widetilde{T} &= \widetilde{T}(q_\sigma, \dot{q}_\sigma) = T(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma) \\ V &= V(q_\sigma) \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

而约束方程为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q_\nu)\dot{q}_\sigma \tag{6.1.10}$$

如果非完整约束有如下形式,即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(\dot{q}_s, q_\sigma, t) \tag{6.1.11}$$

则有广义坐标下的广义 Чаплыгин 方程[3,4]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.1.12}$$

其中

$$\tilde{T}(q_s,\dot{q}_\sigma,t) = T(q_s,\dot{q}_\sigma,\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),t)$$

$$\tilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{6.1.13}$$

6.1.3 积分方法

动力学方程的积分问题是一个一直需要研究的课题。如何千方百计地去寻找较多的积分,以及如何更好地利用这些积分,成为数学、力学家们努力的重要目标。对于完整保守力学系统,已经取得了一些十分美妙的结果,但对一般的非保守系统,尤其是非完整系统的积分理论还不十分完善,还有待进一步充实和发展[11]。非完整动力学的积分方法包括 Whittaker 降阶法的推广、Poisson 理论的推广、场方法的推广、Noether 对称性的推广、Lie 对称性的推广等[7,11,17]。下面介绍非完整力学的 Poisson 方法和 Noether 对称性方法。

1. Poisson 方法

Poisson 方法的出发点是正则方程。假设广义力有势,则方程式(6.1.7)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s} \tag{6.1.14}$$

其中

$$L = T - V, Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s} \tag{6.1.15}$$

引进广义动量和 Hamilton 函数

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s},\quad H = p_s\dot{q}_s - L\quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.1.16}$$

则方程式(6.1.14)可表示为正则形式

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.1.17}$$

式中：(λ_β)、$\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)$为$\lambda_\beta$、$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$中$\dot{\boldsymbol{q}}$用$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t$替代所得表达式。Poisson 方法有如下结果[11]。

命题 1 函数$f(t,p_s,q_s)$为非完整系统式(6.1.3)、式(6.1.17)的第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial f}{\partial p_s} = 0 \tag{6.1.18}$$

其中

$$(f,H) = \frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s} \tag{6.1.19}$$

为 Poisson 括号。

命题 2 函数$f(t,p_\sigma,q_\sigma)$是 Чаплыгин 方程式(6.1.8)第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,\widetilde{H}) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\nu} = 0$$

$$(\sigma,\nu = 1,2,\cdots,\varepsilon;\beta = 1,2,\cdots,g;\varepsilon = n-g) \tag{6.1.20}$$

其中

$$p_\sigma = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma},\quad \widetilde{H} = p_\sigma \dot{q}_\sigma - \widetilde{L} \tag{6.1.21}$$

式(6.1.18)、式(6.1.20)称为非完整系统对第一积分的广义 Poisson 条件。

命题 3 对一般广义力有势的非完整系统，如果 Lagrange 函数L和约束方程$f_\beta = 0$都不显含时间t，而f为系统包含时间t的第一积分，则$\partial f/\partial t, \partial^2 f/\partial t^2, \cdots$均为系统的第一积分。

命题 4 对一般广义力有势的非完整系统，如果 Lagrange 函数L和约束方程$f_\beta = 0$都不显含某个坐标，如q_1，而f为系统显含q_1的第一积分，则$\partial f/\partial q_1, \partial^2 f/\partial q_1^2, \cdots$均为系统的第一积分。

利用命题3和命题4,可由非完整系统的已知积分生成新的积分。

2. Noether 方法

Noether 方法是由 Noether 对称性找到守恒量的一种重要积分方法。Noether 对称性是 Hamilton 作用量在群的无限小变换下的一种不变性。

命题5 如果无限小变换的生成元 ξ_s、ξ_0 和规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下广义 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0$$

$$(s = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.1.22)$$

以及非完整约束的限制条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g; s = 1,2,\cdots,n)$$

$$(6.1.23)$$

其中 Q_s 为非势广义力,则非完整系统式(6.1.7)、式(6.1.3)存在如下形式的 Noether 守恒量,即

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = 常数 \qquad (6.1.24)$$

6.1.4 专门问题

非完整力学理论应用于许多专门问题,如非完整系统的小振动和稳定性[1,18],非完整系统的打击运动,带有可变质量的非完整动力学,有非完整约束时刚体绕定点的转动问题,包含伺服约束的非完整动力学、可控系统动力学、相对运动动力学、机电系统动力学、事件空间动力学,以及动力学逆问题等[11]。这些专门问题不仅丰富了非完整动力学的内容,而且大多有实际背景。

6.2 非完整系统运动方程的组建

本节研究由约束方程和积分来组建非完整系统运动方程的问题。

6.2.1 问题的提法

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{6.2.1}$$

已知系统有 $(m-g)$ 个第一积分

$$\omega_\nu(q_s,\dot{q}_s,t)=C_\nu \quad (\nu=g+1,\cdots,m\leqslant n) \tag{6.2.2}$$

假设式(6.2.1)、式(6.2.2)中的 m 个函数 f_β,ω_ν 彼此相容、独立，且对其中的变量有连续一阶偏导数。

现在提出非完整动力学的一个基本逆问题[19]：已知非完整约束方程式(6.2.1)和积分式(6.2.2)，来组建非完整系统的运动微分方程。

6.2.2 问题的解法

将式(6.2.1)、式(6.2.2)统一表示为

$$\omega_\mu(q_s,\dot{q}_s,t)=C_\mu \quad (\mu=1,\cdots,m\leqslant n) \tag{6.2.3}$$

其中 $\omega_\beta=f_\beta,C_\beta=0(\beta=1,2,\cdots,g)$。将式(6.2.3)对时间 t 求导数，并引入 Еругин 函数，有

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\varPhi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(u=1,\cdots,m\leqslant n) \tag{6.2.4}$$

其中 $\varPhi_\mu$ 为 Еругин 函数。当 $C_\mu\neq0$ 时，$\varPhi_\mu=0$；当 $C_\mu=0$ 时，为满

足

$$\Phi_\mu(0,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0 \tag{6.2.5}$$

的任意函数。式(6.2.4)是力学系统按运动性质式(6.2.1)、式(6.2.2)而运动的必要条件。组建运动方程的问题，归结为寻求系统的广义加速度 $\ddot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$。由式(6.2.4)可解出 m 个 $\ddot{q}$，记作

$$\ddot{q}_r=\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k$$

$$(r,l=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,n;k=m+1,m+2,\cdots,n) \tag{6.2.6}$$

其中

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial\dot{q}_r}\right)_{m\times m}\neq 0$$

而 Δ_{lr} 为行列式 Δ 元素 (l,r) 的代数余子式，Δ^{rk} 为 Δ 中第 r 列用式(6.2.4)中矩阵第 k 列替代所得表达式。

所组建的方程式(6.2.6)的左端为广义加速度，右端则包含广义力、广义约束反力，甚至还可能包含一部分广义加速度。组建运动方程的逆问题，一般说没有唯一解。这是因为，首先，当 $m<n$ 时，不能由式(6.2.6)求出全部广义加速度 $\ddot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$；其次，式(6.2.6)中包含一些 Еругин 函数，它们仅满足式(6.2.5)，但仍然是任意函数。这种非单一解允许根据具体问题的其他需求(如稳定性，优化等)施加一些补充条件来最终建立非完整系统的运动方程。

6.2.3 算例

例1　一质量为 m 的质点在空间中运动，令 $q_1=x,q_2=y,q_3=z$，它的运动受有一个双面理想 Четаев 型非完整约束[4]

$$\omega_1=\dot{q}_3-\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}=0 \tag{6.2.7}$$

已知系统有两个第一积分

$$\omega_2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = h \neq 0 \quad (6.2.8)$$

$$\omega_3 = \dot{q}_2/\dot{q}_1 = C \neq 0 \quad (6.2.9)$$

试组建系统的运动方程。

对本问题,有

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial \omega_l}{\partial \dot{q}_r}\right)_{3\times3} = m\left(1 + \frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)\left[1 + \frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\right] \quad (6.2.10)$$

其代数余子式为

$$\Delta_{11} = -m\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}, \Delta_{12} = -m\frac{\dot{q}_2\dot{q}_3}{\dot{q}_1^2}$$

$$\Delta_{13} = m\left(1 + \frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right), \Delta_{21} = \frac{1}{\dot{q}_1}, \Delta_{22} = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1^2}$$

$$\Delta_{23} = \frac{b}{a}\dot{q}_3^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2}, \Delta_{31} = -m\frac{b}{a}\dot{q}_2\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} - m\dot{q}_2$$

$$\Delta_{32} = m\frac{b}{a}\dot{q}_1\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} + m\dot{q}_1, \Delta_{33} = 0 \quad (6.2.11)$$

因为 $m = n = 3$,故

$$\Delta^{rk} = 0 \quad (6.2.12)$$

因 $h \neq 0, C \neq 0$,故 Еругин 函数

$$\Phi_2 = \Phi_3 = 0 \quad (6.2.13)$$

将式(6.2.10) ~ 式(6.2.13) 代入式(6.2.6),得到

$$\ddot{q}_1 = \frac{m}{\Delta}\left\{-\frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1}(\Phi_1 + g)\right\}, \ddot{q}_2 = \frac{m}{\Delta}\left\{-\frac{\dot{q}_2\dot{q}_3}{\dot{q}_1^2}(\Phi_1 + g)\right\}$$

$$\ddot{q}_3 = \frac{m}{\Delta}\left\{\left(1 + \frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right)\Phi_1 - g\frac{b\dot{q}_3}{a\dot{q}_1^2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2}\right\} \tag{6.2.14}$$

其中

$$\Phi_1 \mid_{\omega_1 = 0} = 0 \tag{6.2.15}$$

式(6.2.14)就是逆问题的解集。特别地,如果限于研究质点必须在超曲面式(6.2.7)上运动,则可将

$$\dot{q}_3 = \frac{b}{a}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2} \tag{6.2.16}$$

带入式(6.2.14),此时有 $\Phi_1 = 0$,于是,得到

$$\ddot{q}_1 = -\frac{abg\dot{q}_1}{(a^2 + b^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2}}$$

$$\ddot{q}_2 = -\frac{abg\dot{q}_2}{(a^2 + b^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2}} \tag{6.2.17}$$

$$\ddot{q}_3 = -\frac{b^2}{a^2 + b^2}g$$

这就是著名的 Appell-Hamel 问题的方程。

例 2　设系统位形由 q_1、q_2 确定,所受非完整约束为[4,20]

$$f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0 \tag{6.2.18}$$

其中 b 为常数。已知有一个积分

$$\omega = \dot{q}_2 - bt\dot{q}_1 + bq_1 = C \neq 0 \tag{6.2.19}$$

试求广义加速度 $\ddot{q}_1$、$\ddot{q}_2$。

将式(6.2.18)、式(6.2.19)对时间 t 求导数,得

$$\ddot{q}_1 + bt\ddot{q}_2 + 1 = \Phi, \ddot{q}_2 - bt\ddot{q}_1 = 0 \tag{6.2.20}$$

由此解得

$$\ddot{q}_1 = \frac{\Phi - 1}{1 + b^2t^2}, \quad \ddot{q}_2 = \frac{bt(\Phi - 1)}{1 + b^2t^2} \tag{6.2.21}$$

这是逆问题的解集。特别地,如果限于研究在超曲面式(6.2.18)

上运动，则有 $\Phi = 0$，于是，得到

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{1 + b^2t^2}, \ddot{q}_2 = \frac{-bt}{1 + b^2t^2} \tag{6.2.22}$$

这是 Новосёлов 例子逆问题的解。

6.3 非完整系统运动方程的修改

本节研究非完整系统运动方程的修改问题，包括运动方程的显式以及与此相关的两类逆问题的提法和解法。

6.3.1 非完整系统运动方程的显式

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\omega_\beta = f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.3.1}$$

系统的运动方程可表示为式(6.1.7)，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.3.2}$$

式中：T 为系统动能；Q_s 为广义力；λ_β 为约束乘子。方程式(6.3.2)可展开为显式[4]

$$\ddot{q}_l = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{ -[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + Q_s - \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right\}$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g; l,k,r,s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.3.3}$$

其中 $\Delta = \det(A_{ks})_{n\times n} \neq 0$，$A_{ks}$ 为动能中广义速度二次型系数，Δ_{sl} 为 Δ 元素 (s,l) 的代数余子式，B_s 为动能中广义速度一次型系数，T_0 为动能中不含广义速度的项，而

$$[k,r;s] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_r} + \frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k} - \frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s}\right) \tag{6.3.4}$$

为系数 A_{ks} 的第一类 Christoffel 记号。

6.3.2 逆问题的提法

非完整系统运动方程的修改这类逆问题有两种提法。

第一种提法：已知系统的动能 T，约束方程式(6.3.1)以及 $(m-g)$ 个第一积分

$$\omega_\nu(q_s,\dot{q}_s,t)=C_\nu \quad (\nu=g+1,g+2,\cdots,m) \tag{6.3.5}$$

需要确定广义力 Q_s 和约束乘子 λ_β。

第二种提法[21]：已知系统的 m 个积分

$$\omega_\mu(q_s,\dot{q}_s,t)=C_\mu \quad (\mu=1,2,\cdots,m) \tag{6.3.6}$$

需要确定施加在系统上的非完整约束。

6.3.3 逆问题的解法

第一种提法的解法。

将式(6.3.1)和式(6.3.5)对 t 求导数，并引入 Еругин 函数 Φ_μ，有

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\mu=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,n) \tag{6.3.7}$$

再将式(6.3.3)代入式(6.3.7)，便给出为确定待求参数 Q_s,λ_β 的 m 个代数方程。这个逆问题与6.2节中的逆问题一样，一般说也没有唯一解。

第二种提法的解法。

将式(6.3.6)对 t 求导数，仍得式(6.3.7)。由式(6.3.7)解出一部分广义加速度，记作

$$\ddot{q}_r=\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k$$

$$(r,l=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,n;k=m+1,m+2,\cdots,n) \tag{6.3.8}$$

假设系统所受非完整约束有如下形式,即

$$f_\beta(q_q,\dot{q}_s,t)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n)\tag{6.3.9}$$

下面建立 f_β 应满足的方程。将式(6.3.9)对 t 求导数,并引入 Еругин 函数 Ψ_β,有

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n)\tag{6.3.10}$$

其中 Ψ_β 满足

$$\Psi_\beta(0,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0\tag{6.3.11}$$

将式(6.3.8)代入式(6.3.10),得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_r}\left\{\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k\right\}+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;r,l=1,2,\cdots,m;$$
$$k=m+1,m+2,\cdots,n;s=1,2,\cdots,n)\tag{6.3.12}$$

方程式(6.3.12)就是系统上施加的非完整约束 f_β 应满足的偏微分方程组。在一般情形下,由方程式(6.3.12)还不能得到 f_β 的具体形式。在此研究一些特殊情形。当 $m=n$ 时,方程式(6.3.12)成为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_r}\left\{\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)\right\}+\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;r,l,s=1,2,\cdots,n)\tag{6.3.13}$$

进而,如果所有 $C_\mu\neq0$,则 $\Phi_l=0$,而方程式(6.3.12)成为

$$-\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_r}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)+\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;r,l,s=1,2,\cdots,n)\tag{6.3.14}$$

最后，如果仅限于研究满足约束式(6.3.10)的运动，那么 $\Psi_\beta = 0$，而方程式(6.3.12)成为

$$-\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_r}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\frac{\partial \omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \omega_l}{\partial t}\right) + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} = 0$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g;r,l,s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.3.15}$$

解偏微分方程式(6.3.15)，就有可能得到约束 f_β 的具体表达式。

6.3.4 算例

例1　已知系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \tag{6.3.16}$$

非完整约束方程为

$$\omega_1 = \dot{q}_3 - \frac{b}{a}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2} = 0 \tag{6.3.17}$$

运动积分为

$$\omega_2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = h \neq 0 \tag{6.3.18}$$

$$\omega_3 = \dot{q}_2/\dot{q}_1 = C \neq 0 \tag{6.3.19}$$

试修改系统的运动方程。

运动方程的修改问题归结为寻求广义力 $Q_s(s = 1,2,3)$ 和约束乘子 λ 的问题。方程式(6.3.2)给出

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \frac{Q_1}{m} - \frac{\lambda}{m}\frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} \\
\ddot{q}_2 &= \frac{Q_2}{m} - \frac{\lambda}{m}\frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} \\
\ddot{q}_3 &= \frac{Q_3}{m} + \frac{\lambda}{m}
\end{aligned} \tag{6.3.20}$$

将式(6.2.17) ~ 式(6.2.19)对时间 t 求导数,并引入 Еругин 函数,得

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_3 - \frac{b}{a}(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = \Phi_1 \\ &m(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 + \dot{q}_3\ddot{q}_3) + mg\dot{q}_3 = \Phi_2 \\ &(\ddot{q}_2\dot{q}_1 - \ddot{q}_1\dot{q}_2)\dot{q}_1^{-2} = \Phi_3 \end{aligned} \tag{6.3.21}$$

因 $h \neq 0, C \neq 0$,故

$$\Phi_2 = \Phi_3 = 0 \tag{6.3.22}$$

若限于研究质点在超曲面式(6.3.17)上运动,则有

$$\Phi_1 = 0 \tag{6.3.23}$$

将式(6.3.22)、式(6.3.23)代入方程式(6.3.21),并利用方程式(6.3.20)消去广义加速度 $\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,\ddot{q}_3$ 得到

$$\begin{aligned} &-\frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\frac{Q_1}{m} - \frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\frac{Q_2}{m} + \frac{Q_3}{m} = \frac{\lambda}{m}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &\dot{q}_1Q_1 + \dot{q}_2Q_2 + \dot{q}_3Q_3 = -mg\dot{q}_3 \\ &-\dot{q}_2Q_1 + \dot{q}_1Q_2 = 0 \end{aligned} \tag{6.3.24}$$

式(6.3.24)就是为确定广义力 Q_1,Q_2,Q_3 和约束乘子 λ 的代数方程。由式(6.3.24)还不能唯一地确定这四个未知量。

特别地,如取

$$Q_1 = 0 \tag{6.3.25}$$

则由方程式(6.3.24)可解得

$$Q_2 = 0, Q_3 = -mg, \lambda = -\frac{mg}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} \tag{6.3.26}$$

将式(6.3.25)、式(6.3.26)代入方程式(6.3.20),便完成了运动方程的修改。

例2　假设单位质量质点在一个非完整约束下在空间运动，已知系统有三个第一积分

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + gq_3 = C_1 \qquad (6.3.27)$$

$$\omega_2 = \dot{q}_2/\dot{q}_1 = C_2 \qquad (6.3.28)$$

$$\omega_3 = \dot{q}_1\dot{q}_3 + gq_1 = C_3 \qquad (6.3.29)$$

式中：C_1、C_2、C_3 为任意常数；g 为重力加速度。试研究非完整约束的形式。

首先，求广义加速度。将式(6.3.27) ~ 式(6.3.29) 对时间 t 求导数，因 C_1、C_2、C_3 为任意常数，故 Ерутин 函数为零，有

$$\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 + \dot{q}_3\ddot{q}_3 + g\dot{q}_3 = 0 \qquad (6.3.30)$$

$$\dot{q}_1\ddot{q}_2 - \dot{q}_2\ddot{q}_1 = 0 \qquad (6.3.31)$$

$$\dot{q}_3\ddot{q}_1 + \dot{q}_1\ddot{q}_3 + g\dot{q}_1 = 0 \qquad (6.3.32)$$

由式(6.3.28)、式(6.3.31) 解得

$$\ddot{q}_2 = C_2\ddot{q}_1 \qquad (6.3.33)$$

将式(6.3.33) 代入式(6.3.30)、式(6.3.32)，得

$$q_1\ddot{q}_1(1 + C_2^2) + \dot{q}_3\ddot{q}_3 = -g\dot{q}_3 \qquad (6.3.34)$$

$$\dot{q}_3\ddot{q}_1 + \dot{q}_1\ddot{q}_3 = -g\dot{q}_1 \qquad (6.3.35)$$

当

$$\Delta = \dot{q}_1^2(1 + C_2^2) - \dot{q}_3^2 \neq 0$$

时，由式(6.3.33) ~ 式(6.3.35) 求得第一组解

$$\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0, \ddot{q}_3 = -g \qquad (6.3.36)$$

当

$$\Delta = \dot{q}_1^2(1 + C_2^2) - \dot{q}_3^2 = 0 \qquad (6.3.37)$$

时，将其对 t 求导数，并将结果代入方程式(6.3.34)，得

$$\ddot{q}_1 = -g\dot{q}_1\dot{q}_3/2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \qquad (6.3.38)$$

将其代入方程式(6.3.35),得

$$\ddot{q}_3 = -g + g\dot{q}_3^2/2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{6.3.39}$$

再将式(6.3.38)代入式(6.3.33)并注意到式(6.3.39),得

$$\ddot{q}_2 = -g\dot{q}_2\dot{q}_3/2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{6.3.40}$$

于是,得到第二组解式(6.3.38)~式(6.3.40)。

其次,研究非完整约束的形式。假设非完整约束方程有如下形式,即

$$f(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t) = 0 \tag{6.3.41}$$

如果仅限于沿超曲面式(6.3.41)的运动,则有

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}\ddot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3}\ddot{q}_3 + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{6.3.42}$$

将问题的第一组解式(6.3.36)代入方程式(6.3.42),得

$$-\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3}g + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{6.3.43}$$

于是f有如下形式,即

$$f = \varphi(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 + t) \tag{6.3.44}$$

其中φ为任意函数。再将第二组解式(6.3.38)~式(6.3.40)代入式(6.3.42),得到偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{-g\dot{q}_1\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)}\right) + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{-g\dot{q}_2\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)}\right) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3}\left(-g + \frac{g\dot{q}_3^2}{2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{6.3.45}$$

可以找到方程式(6.3.45)的一个解

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 \tag{6.3.46}$$

6.4 非完整系统运动方程的封闭

本节研究非完整系统运动方程的封闭问题,包括方程的一阶形式、封闭问题的提法和解法。

6.4.1 非完整系统运动方程的一阶形式

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\omega_\beta = \dot{q}_{\varepsilon+\beta} - \varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t) = 0\begin{pmatrix}\beta = 1,2,\cdots,g;\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\\ \varepsilon = n-g;s = 1,2,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{6.4.1}$$

系统的运动方程可写成牛青萍形式[3],即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = \widetilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n-g;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.4.2}$$

其中 $\widetilde{T}$ 和 $\widetilde{Q}_\sigma$ 分别为嵌入约束后的动能和广义力,有

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}(q_s,\dot{q}_\sigma,t) = T(q_s,\dot{q}_\sigma,\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),t)$$

$$\widetilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

需要注意的是,方程组(6.4.2)中的 $\partial T/\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}$、$\partial T/\partial q_{\varepsilon+\beta}$ 以及 Q_s 中的 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 应以函数 φ_β 替代。由动能的性质可知,方程组(6.4.2)对 $\ddot{q}_\sigma$ 是线性的,并且是可解的。由方程组(6.4.2)解出 $\ddot{q}_\sigma$,简记作

$$\ddot{q}_\sigma = f_\sigma(q_s,\dot{q}_\nu,t) \quad (\sigma,\nu = 1,2,\cdots,\varepsilon;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.4.3}$$

令

$$x_s = q_s, \quad x_{n+s} = \dot{q}_s \tag{6.4.4}$$

则式(6.4.1)、式(6.4.3)可表示为一阶形式,即

$$\dot{x}_\sigma = x_{n+\sigma} \tag{6.4.5}$$

$$\dot{x}_{\varepsilon+\beta} = x_{n+\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(x_s, x_{n+\sigma}, t) \tag{6.4.6}$$

$$\dot{x}_{n+\sigma} = f_\sigma(x_s, x_{n+\nu}, t) \tag{6.4.7}$$

为得到$\dot{x}_{n+\varepsilon+\beta}$,可将式(6.4.1)对$t$求导数,并引入Еругин函数$\Phi_\beta$,有

$$\dot{x}_{n+\varepsilon+\beta} = \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\sigma}x_{n+\sigma} + \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_{\varepsilon+\gamma}}\varphi_\gamma + \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_{n+\sigma}}f_\sigma + \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t} + \boldsymbol{\Phi}_\beta(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

$$(\beta,\gamma = 1,2,\cdots,g;\varepsilon = n-g;\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{6.4.8}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_\beta(0, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0$$

式(6.4.5) ~ 式(6.4.8)可称为用Еругин方法得到的非完整系统的运动方程。

6.4.2 逆问题的提法

现在分析式(6.4.5) ~ 式(6.4.8)。它们是$2n$个一阶方程,其中n个式(6.4.5)、式(6.4.6)的右端在给定非完整约束下是$x_i(i = 1,2,\cdots,2n)$和t的已知函数,而后面n个式(6.4.7)、式(6.4.8)的右端是待求的。

提出非完整动力学的一个基本逆问题 —— 运动方程的封闭问题。这个逆问题的提法如下:已知非完整约束方程式(6.4.1)及一部分运动方程式(6.4.5)、式(6.4.6),根据给定的$(m-g)$个第一积分

$$\omega_\mu(q_s, \dot{q}_s, t) = C_\mu \quad (\mu = g+1, g+2, \cdots, m; s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.4.9}$$

来封闭式(6.4.5) ~ 式(6.4.8)。

6.4.3 逆问题的解法

方程式(6.4.9)可写成

$$\omega_{\mu}(x_s, x_{n+s}, t) = C_{\mu} \tag{6.4.10}$$

将其对 t 求导数,利用式(6.4.5) ~ 式(6.4.8),并引入 Ерупин 函数 Φ_{μ},得到

$$\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} x_{n+\sigma} + \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{\varepsilon+\beta}} \varphi_{\beta} + \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{n+\sigma}} f_{\sigma} + \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial t} +$$

$$\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{n+\varepsilon+\beta}} \left(\frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} x_{n+\sigma} + \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\varepsilon+\gamma}} \varphi_{\gamma} + \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_{n+\sigma}} f_{\sigma} + \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial t} + \Phi_{\beta} \right) = \Phi_{\mu}$$

$$(\mu = g+1, g+2, \cdots, m; \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, g;$$

$$\varepsilon = n - g; \sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon) \tag{6.4.11}$$

或者写成

$$\left(\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{n+\sigma}} + \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{n+\varepsilon+\beta}} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_{n+\sigma}} \right) f_{\sigma} = \Phi_{\mu}^{*} - \varphi_{\mu} \tag{6.4.12}$$

其中

$$\Phi_{\mu}^{*} = \Phi_{\mu} - \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{n+\varepsilon+\beta}} \Phi_{\beta}$$

$$\varphi_{\mu} = \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} x_{n+\sigma} + \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{\varepsilon+\beta}} \varphi_{\beta} + \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial t} + \tag{6.4.13}$$

$$\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x_{n+\varepsilon+\beta}} \left(\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_{\sigma}} x_{n+\sigma} + \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_{\varepsilon+\gamma}} \varphi_{\gamma} + \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial t} \right)$$

由式(6.4.12)可解出 $(m-g)$ 个 f_r,有

$$f_r = \frac{\Delta_{lr}}{\Delta} (\Phi_l^{*} - \varphi_l) - \frac{\Delta^{rk}}{\Delta} f_k \quad (r = 1, 2, \cdots, m-g;$$

$$l = g+1, g+2, \cdots, m; k = m+1, m+2, \cdots, \varepsilon) \tag{6.4.14}$$

其中

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_{n+r}} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_{n+\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_{n+r}}\right)_{(m-g)\times(m-g)} \neq 0$$

Δ_{lr} 为 Δ 元素 (l,r) 的代数余子式，Δ^{rk} 为 Δ 中第 r 列用式(6.4.12)矩阵的第 k 列替代所得行列式。

运动方程的封闭这类逆问题，一般说没有唯一解。这是因为，首先，方程式(6.4.12)在 $m < n$ 时不能求出全部的 f_s；其次，方程式(6.4.12)中还包含一些 Еругин 函数。

6.4.4 算例

研究匀质圆球在粗糙水平面上自由运动时，运动方程的封闭问题。

圆球的位置由其质心坐标 x、y 和 Euler 角 ψ、θ、φ 来确定。系统有两个非完整约束，它们表示圆球与平面接触点的速度为零，有如下形式，即

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{x} + a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi) = 0 \\ \omega_2 &= \dot{y} + a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi) = 0 \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

其中 a 为球的半径。给定系统三个第一积分

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta) = \\ &\quad h \neq 0 \\ \omega_4 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi = C \neq 0 \\ \omega_5 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi = C_1 \neq 0 \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

令

$$x_1 = q_1 = \psi, x_2 = q_2 = \theta, x_3 = q_3 = \varphi, x_4 = q_4 = x$$

$$x_5 = q_5 = y, x_6 = \dot{\psi}, x_7 = \dot{\theta}, x_8 = \dot{\varphi}, x_9 = \dot{x}, x_{10} = \dot{y}$$

方程式(6.4.5)、式(6.4.6)给出

$$\dot{x}_1 = x_6, \dot{x}_2 = x_7, \dot{x}_3 = x_8$$

$$\dot{x}_4 = x_9 = -a(x_8\cos x_1 \sin x_2 - x_7 \sin x_1) \quad (6.4.17)$$

$$\dot{x}_5 = x_{10} = -a(x_8 \sin x_1 \sin x_2 + x_7 \cos x_1)$$

而式(6.4.16)成为

$$\omega_3 = \frac{1}{2}m(x_9^2 + x_{10}^2) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + 2x_6x_8\cos x_2)$$

$$\omega_4 = x_7\cos x_1 + x_8\sin x_2 \sin x_1, \omega_5 = -x_7\sin x_1 + x_8 \sin x_2 \cos x_1$$

$$(6.4.18)$$

为按式(6.4.14)求得$f_r(r = 1,2,3)$,进行下列计算

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_{5+r}} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_{8+\beta}}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_{5+r}}\right)_{3\times 3} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2) & \frac{7}{5}ma^2 x_7 & \frac{2}{5}ma^2(x_8 + x_6\cos x_2) \\ 0 & \cos x_1 & \sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & -\sin x_1 & \sin x_2 \cos x_1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2)\sin x_2 \quad (6.4.19)$$

$$\Delta_{31} = \sin x_2, \Delta_{32} = \Delta_{33} = 0$$

$$\Delta_{41} = -\frac{7}{5}ma^2 x_7 \sin x_2 \cos x_1 - \frac{2}{5}ma^2(x_8 + x_6\cos x_2)\sin x_1$$

$$\Delta_{42} = \frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2)\sin x_2 \cos x_1$$

$$\Delta_{43} = \frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2)\sin x_1$$

$$\Delta_{51} = \frac{7}{5}ma^2 x_7 \sin x_2 \sin x_1 - \frac{2}{5}ma^2(x_8 + x_6\cos x_2)\cos x_1 - ma^2 x_8 \sin^2 x_2 \cos x_1$$

$$\Delta_{52} = -\frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2)\sin x_2 \sin x_1$$

$$\Delta_{53} = \frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2)\cos x_1 \qquad (6.4.20)$$

$$\varphi_3 = -\frac{2}{5}ma^2 x_6 x_7 x_8 \sin x_2 + ma^2 x_8^2 x_7 \cos x_2 \sin x_2$$

$$\varphi_4 = (-x_7\sin x_1 + x_8\sin x_2\cos x_1)x_6 + x_8 x_7 \cos x_2 \sin x_1$$

$$\varphi_5 = (-x_7\cos x_1 - x_8\sin x_2\sin x_1)x_6 + x_8 x_7\cos x_2\cos x_1$$

$$\Phi_3^* = \Phi_3 - mx_9\Phi_1 - mx_{10}\Phi_2, \Phi_4^* = \Phi_4, \Phi_5^* = \Phi_5 \qquad (6.4.21)$$

关系式(6.4.14)给出

$$f_1 = \frac{1}{\Delta}\{\Delta_{31}(\Phi_3^* - \Phi_3) + \Delta_{41}(\Phi_4^* - \Phi_4) + \Delta_{51}(\Phi_5^* - \Phi_5)\}$$

$$f_2 = \frac{1}{\Delta}\{\Delta_{32}(\Phi_3^* - \Phi_3) + \Delta_{42}(\Phi_4^* - \Phi_4) + \Delta_{52}(\Phi_5^* - \Phi_5)\}$$

$$f_3 = \frac{1}{\Delta}\{\Delta_{33}(\Phi_3^* - \Phi_3) + \Delta_{43}(\Phi_4^* - \Phi_4) + \Delta_{53}(\Phi_5^* - \Phi_5)\} \qquad (6.4.22)$$

将式(6.4.19) ~ 式(6.4.21)代入式(6.4.22),得到

$$f_1 = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{31}\Phi_3^* + \Delta_{41}\Phi_4^* + \Delta_{51}\Phi_5^*) + \frac{1}{\Delta}\left(\frac{2}{5}ma^2 x_6 x_7 x_8 \sin^2 x_2 + \frac{2}{5}ma^2 x_7 x_8^2 \cos x_2 - \frac{2}{5}ma^2 x_6^2 x_7 \cos x_2\right)$$

$$f_2 = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{32}\Phi_3^* + \Delta_{42}\Phi_4^* + \Delta_{52}\Phi_5^*) +$$

$$\frac{1}{\Delta}\left\{-\frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2)x_6x_8\sin x_2\right\} \quad (6.4.23)$$

$$f_3 = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{33}\Phi_3^* + \Delta_{43}\Phi_4^* + \Delta_{53}\Phi_5^*) +$$

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{2}{5}ma^2(x_6 + x_8\cos x_2)(x_8 - x_6\cos x_2)x_7\right\}$$

因h、C、C_1不为零，故 Еругин 函数为

$$\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0 \quad (6.4.24)$$

注意到式(6.4.21)，于是有

$$f_1 = \frac{x_8\cos x_1\sin x_2 - x_7\sin x_1}{\frac{2}{5}a(x_8 + x_6\cos x_2)}\Phi_1 + \frac{x_8\sin x_1\sin x_2 + x_7\cos x_1}{\frac{2}{5}a(x_8 + x_6\cos x_2)}\Phi_2 +$$

$$\frac{x_7(x_6x_8\sin^2 x_2 + x_8^2\cos x_2 - x_6^2\cos x_2)}{(x_6 + x_8\cos x_2)\sin x_2} \quad (6.4.25)$$

$$f_2 = -x_6x_8\sin x_2, f_3 = \frac{x_7(x_6 - x_8\cos x_2)}{\sin x_2}$$

特别地，如果限于研究沿超曲面式(6.4.15)的运动，则式(6.4.25)中的$\Phi_1 = \Phi_2 = 0$。这样，便有

$$f_1 = \frac{x_7[x_6x_8\sin^2 x_2 + (x_8^2 - x_6^2)\cos x_2]}{(x_6 + x_8\cos x_2)\sin x_2}$$

$$f_2 = -x_6x_8\sin x_2, f_3 = \frac{x_7(x_6 - x_8\cos x_2)}{\sin x_2} \quad (6.4.26)$$

而

$$\dot{x}_6 = f_1, \quad \dot{x}_7 = f_2, \quad \dot{x}_8 = f_3 \quad (6.4.27)$$

于是，式(6.4.7)、式(6.4.8)的右端可以表示出来，从而完成运动

方程的封闭。

6.5 力场的构造

本节研究在已知非完整约束和一部分积分时来求广义力的问题,称为力场的构造。

6.5.1 构造

提出非完整系统的如下逆问题:设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\omega_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \dot{q}_{\varepsilon+\beta} - \varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t) = 0$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g;\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.5.1}$$

并具有 $(n - g)$ 个第一积分

$$\omega_\alpha(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = C_\alpha \quad (\alpha = g + 1,g + 2,\cdots,n) \tag{6.5.2}$$

试求作用在系统上的广义力。

为解此问题,首先写出系统运动的 Maggi 型方程[8,9]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - Q_{\varepsilon+\beta}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.5.3}$$

将其改写为

$$Q_\sigma + Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{6.5.4}$$

将式(6.5.1)、式(6.5.2)合并一起并写成

$$\omega_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = C_\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,n) \tag{6.5.5}$$

再将式(6.5.5)对 t 求导数,并引入 Еругин 函数,得到

$$\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\quad(\mu,s=1,2,\cdots,n)\tag{6.5.6}$$

假设由方程式(6.5.6)可解出 n 个广义加速度,并记作

$$\ddot{q}_s=F_s(q_k,\dot{q}_k,\Phi_\mu,t)\quad(s,k,\mu=1,2,\cdots,n)\tag{6.5.7}$$

最后,将式(6.5.7)代入方程式(6.5.4),便得为确定广义力 Q_s 的 $(n-g)$ 个代数方程。由这些代数方程,一般说尚不能求出全部广义力。

6.5.2 算例

例1 一质量为 m 的质点在空间中运动,其动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)\tag{6.5.8}$$

它的运动受有一个非线性非完整约束

$$\omega_1=\dot{q}_3-\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}=0\tag{6.5.9}$$

已知系统有两个第一积分

$$\begin{aligned}\omega_2&=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+mgq_3=h\neq0\\ \omega_3&=\dot{q}_2/\dot{q}_1=C\neq0\end{aligned}\tag{6.5.10}$$

试求作用在系统上的广义力 Q_1、Q_2 和 Q_3。

本问题是 $n=3,g=1$ 的情形。首先,列写 Maggi 方程,式(6.5.4)给出

$$\begin{aligned}Q_1+Q_3\frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}&=m\ddot{q}_1+m\ddot{q}_3\frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}\\ Q_2+Q_3\frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}&=m\ddot{q}_2+m\ddot{q}_3\frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2}\end{aligned}\tag{6.5.11}$$

其次，将式(6.5.9)、式(6.5.10)对 t 求导数，并引入 Еругин 函数 Φ_1，有

$$\begin{gathered}
\ddot{q}_3 - \frac{b}{a}(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = \Phi_1 \\
m(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 + \dot{q}_3\ddot{q}_3) + mg\dot{q}_3 = 0 \\
(\ddot{q}_2\dot{q}_1 - \ddot{q}_1\dot{q}_2)\dot{q}_1^{-2} = 0
\end{gathered} \tag{6.5.12}$$

由此解得

$$\ddot{q}_1 = -\frac{\dot{q}_1\dot{q}_3(\Phi_1 + g)}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\left[1 + \frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\right]}$$

$$\ddot{q}_2 = -\frac{\dot{q}_2\dot{q}_3(\Phi_1 + g)}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\left[1 + \frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\right]}$$

$$\ddot{q}_3 = \frac{\Phi_1 - \frac{b}{a}g\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}}{1 + \frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}} \tag{6.5.13}$$

将式(6.5.13)代入式(6.5.11)，得到

$$\begin{gathered}
Q_1 + Q_3\frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = \\
m\frac{-\dot{q}_1\dot{q}_3(\Phi_1 + g) + \frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2}\left[\Phi_1 - \frac{b}{a}g\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\right]}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\left[1 + \frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\right]} \\
Q_2 + Q_3\frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = \\
m\frac{-\dot{q}_2\dot{q}_3(\Phi_1 + g) + \frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2}\left[\Phi_1 - \frac{b}{a}g\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\right]}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\left[1 + \frac{b}{a}\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}\right]}
\end{gathered} \tag{6.5.14}$$

这就是为确定广义力 Q_1、Q_2 和 Q_3 的两个代数方程。

如果限于研究质点必须在超曲面式(6.5.9)上运动,则有

$$\dot{q}_3 = \frac{b}{a}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2}, \quad \Phi_1 |_{\omega_1 = 0} = 0 \qquad (6.5.15)$$

将式(6.5.15)代入式(6.5.14),得到

$$Q_1 + Q_3 \frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = -mg\frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}$$

$$Q_2 + Q_3 \frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = -mg\frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}$$

$$(6.5.16)$$

由此尚不能最后确定出 Q_1、Q_2 和 Q_3。显然

$$Q_1 = Q_2 = 0, Q_3 = -mg \qquad (6.5.17)$$

是问题的一个解。

例 2　已知系统位形由 q_1、q_2 确定,动能为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \qquad (6.5.18)$$

非完整约束为线性非定常的,有

$$\omega_1 = \dot{q}_1 - t\dot{q}_2 = 0 \qquad (6.5.19)$$

已知系统有一个积分

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}q_2^2 = C \neq 0 \qquad (6.5.20)$$

试构造问题的力场。

式(6.5.4)给出

$$Q_2 + Q_1 t = \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 t \qquad (6.5.21)$$

将式(6.5.19)、式(6.5.20)对 t 求导数,并引入 Еругин 函数 Φ_1,得到

$$\ddot{q}_1 - t\ddot{q}_2 - \dot{q}_2 = \Phi_1, \dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 + q_2\dot{q}_2 = 0$$

由此解得

$$\ddot{q}_1 = -\frac{t}{\dot{q}_2 + t\dot{q}_1}(\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_2\dot{q}_2 + \dot{q}_1\Phi_1) + \dot{q}_2 + \Phi_1$$

$$\ddot{q}_2 = -\frac{1}{\dot{q}_2 + t\dot{q}_1}(\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_2\dot{q}_2 + \dot{q}_1\Phi_1)$$

(6.5.22)

注意到式(6.5.19)，则有

$$\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 t = -q_2 \tag{6.5.23}$$

将式(6.5.23)代入式(6.5.21)，得

$$Q_2 + Q_1 t = -q_2 \tag{6.5.24}$$

这就是问题的力场。

6.6 广义 Poisson 条件与非完整动力学逆问题

本节研究与广义 Poisson 条件式(6.1.18)、式(6.1.20)相关的非完整动力学逆问题，包括非完整系统对第一积分的广义 Poisson 条件、Hamilton 函数的构造、势力场的构造等。

6.6.1 非完整系统对第一积分的广义 Poisson 条件

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.6.1}$$

设所受广义力有势，则运动方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.6.2}$$

引入广义动量和 Hamilton 函数

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \quad H = p_s \dot{q}_s - L \tag{6.6.3}$$

则方程式(6.6.2) 可表示为正则形式,即

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)$$

$$(s = 1,2,\cdots,n;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.6.4}$$

其中(λ_β),$(\partial f_\beta/\partial \dot{q}_s)$为$\lambda_\beta$,$\partial f_\beta/\partial \dot{q}_s$中$\dot{\boldsymbol{q}}$用$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t$替代所得表达式。设$f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$为系统的第一积分,则有

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial f}{\partial p_s} = 0 \tag{6.6.5}$$

其中(f,H)为 Poisson 括号

$$(f,H) = \frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

式(6.6.5) 称为非完整系统对第一积分的广义 Poisson 条件。这是一个充分必要条件:如果f满足式(6.6.5),则它是系统的积分;如果f是积分,则它必满足式(6.6.5)。

对于 Чаплыгин 非完整系统,此时L中不含$q_{\varepsilon+\beta}$,约束是线性、齐次、定常的,且不含$q_{\varepsilon+\beta}$,即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q_\nu)\dot{q}_\sigma$$

$$(\beta,1,2,\cdots,g;\sigma,\nu = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g) \tag{6.6.6}$$

令

$$\widetilde{L}(q_\sigma,\dot{q}_\sigma) = L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma)$$

引入广义动量和 Hamilton 函数

$$p_\sigma = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \widetilde{H} = p_\sigma \dot{q}_\sigma - \widetilde{L} \tag{6.6.7}$$

则系统的正则方程为

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\nu}$$

$$(\sigma,\nu = 1,2,\cdots,\varepsilon;\beta = 1,2,\cdots,g;\varepsilon = n-g) \quad (6.6.8)$$

其中$(\partial L/\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta})$为$\partial L/\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}$中$\dot{q}_\nu$用$q_\sigma, p_\sigma$表示所得表达式。设$f(q_\sigma, p_\sigma, t)$是系统的第一积分,则有[11]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, \widetilde{H}) - \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\nu} = 0$$

$$(\sigma,\nu = 1,2,\cdots,\varepsilon;\beta = 1,2,\cdots,g;\varepsilon = n-g) \quad (6.6.9)$$

式(6.6.9)就是Чаплыгин非完整系统对第一积分的广义Poisson条件。

6.6.2 Hamilton函数的构造

现在提出与广义Poisson条件相关的一个逆问题:给定非完整约束方程式(6.6.1)以及m个彼此相容且独立的第一积分

$$\omega_\mu(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = c_\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,m) \quad (6.6.10)$$

来求系统Hamilton函数H的集合。这里假设式(6.6.10)与式(6.6.1)彼此相容且独立。

为解这类逆问题,可利用广义Poisson条件式(6.6.5)。将式(6.6.10)代入式(6.6.5),得到

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial t} + (\omega_\mu, H) + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_s} = 0$$

$$(\mu = 1,2,\cdots,m;\beta = 1,2,\cdots,g;s = 1,2,\cdots,n) \quad (6.6.11)$$

将约束方程式(6.6.1)表示为

$$\tilde{f}_\beta(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = 0 \quad (6.6.12)$$

其中

$$\tilde{f}_\beta(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t)$$

式(6.6.12)是系统的特殊积分，也满足广义 Poisson 条件式(6.6.5)，因此，有

$$\frac{\partial \tilde{f}_\beta}{\partial t} + (\tilde{f}_\beta, H) + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial \tilde{f}_\beta}{\partial p_s} = 0$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,m; s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.6.13}$$

这样，由式(6.6.11)和式(6.6.13)便有可能找到系统的Hamilton函数 H。

6.6.3 势力场的构造

现在提出与广义 Poisson 条件相关的另一个逆问题：给定非完整约束式(6.6.1)，系统的动能 T 以及 m 个彼此相容且独立的第一积分式(6.6.10)，来求系统的力函数 $U(\boldsymbol{q})$。

为解这个逆问题，将 Hamilton 函数表示为

$$H = T(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{q}) \tag{6.6.14}$$

式中：T 是已知的；U 是待求的。将式(6.6.14)代入式(6.6.11)，得到

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial t} + (\omega_\mu, T) - (\omega_\mu, U) + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial \omega_\mu}{\partial p_s} = 0$$

$$(\mu = 1,2,\cdots,m; \beta = 1,2,\cdots,g; s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.6.15}$$

将式(6.6.14)代入式(6.6.13)，得到

$$\frac{\partial \tilde{f}_\beta}{\partial t} + (\tilde{f}_\beta, T) - (\tilde{f}_\beta, U) + (\lambda_\beta)\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\partial \tilde{f}_\beta}{\partial p_s} = 0$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g; s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.6.16}$$

这样，由式(6.6.15)和式(6.6.16)便有可能找到系统的力函数 $U(\boldsymbol{q})$。

6.6.4 算例

例 1 一质量为 m 的质点在势力场中运动，它的运动受有一

个非完整约束

$$f = \dot{q}_3 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2} = 0 \tag{6.6.17}$$

广义动量为

$$p_1 = m\dot{q}_1,\quad p_2 = m\dot{q}_2,\quad p_3 = m\dot{q}_3 \tag{6.6.18}$$

已知系统有两个第一积分

$$\omega_1 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgq_3 = h \tag{6.6.19}$$

$$\omega_2 = p_2/p_1 = c$$

试构造问题的 Hamilton 函数 H。

方程式(6.6.11) 给出

$$-\frac{p_1}{m}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{p_2}{m}\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{p_3}{m}\frac{\partial H}{\partial q_3} + mg\frac{\partial H}{\partial p_3} +$$

$$\lambda\left\{-p_1(p_1^2 + p_2^2)^{-1/2}\frac{p_1}{m} - p_2(p_1^2 + p_2^2)^{-1/2}\frac{p_2}{m} + \frac{p_3}{m}\right\} = 0$$

$$\frac{p_2}{p_1^2}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{1}{p_1}\frac{\partial H}{\partial q_2} +$$

$$\lambda\left\{p_1(p_1^2 + p_2^2)^{-1/2}\frac{p_2}{p_1^2} - p_2(p_1^2 + p_2^2)^{-1/2}\frac{1}{p_1}\right\} = 0 \tag{6.6.20}$$

考虑到约束方程式(6.6.17),则方程式(6.6.20) 成为

$$-\frac{p_1}{m}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{p_2}{m}\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{p_3}{m}\frac{\partial H}{\partial q_3} + mg\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0 \tag{6.6.21}$$

$$p_2\frac{\partial H}{\partial q_1} - p_1\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0$$

方程式(6.6.21) 有解

$$H = mgq_3 + \frac{1}{2m}p_3^2 + H_1(p_1, p_2) \tag{6.6.22}$$

考虑到

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H_1}{\partial p_1},\quad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \tag{6.6.23}$$

于是，有

$$H_1 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) \tag{6.6.24}$$

将其代入式(6.6.22)，得

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgq_3 \tag{6.6.25}$$

对此问题，方程式(6.6.13)给出

$$\frac{1}{m}p_1(p_1^2 + p_2^2)^{-1/2}\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{1}{2}p_2(p_1^2 + p_2^2)^{-1/2}\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial q_3} + \frac{2\lambda}{m} = 0 \tag{6.6.26}$$

将式(6.6.25)代入式(6.6.26)，得到约束乘子

$$\lambda = \frac{1}{2}mg \tag{6.6.27}$$

例 2　一质量为 m 的质点在势力场中运动，它的运动受有一个非线性非完整约束式(6.6.17)。已知系统的动能为

$$T = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \tag{6.6.28}$$

并给定一个第一积分

$$\omega = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgq_3 = h \tag{6.6.29}$$

试求系统所受广义力的力函数 $U(\boldsymbol{q})$。

广义动量表示为

$$p_1 = m\dot{q}_1,\quad p_2 = m\dot{q}_2,\quad p_3 = m\dot{q}_3 \tag{6.6.30}$$

将式(6.6.17)、式(6.6.28)和式(6.6.29)代入式(6.6.15)，并注意到式(6.6.30)，得到

$$mg\frac{p_3}{m} + \frac{p_1}{m}\frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{p_2}{m}\frac{\partial U}{\partial q_2} + \frac{p_3}{m}\frac{\partial U}{\partial q_3} = 0 \tag{6.6.31}$$

可找到它的一个解

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_3} = - mg \tag{6.6.32}$$

于是,有

$$U = - mgq_3 \tag{6.6.33}$$

6.7 Bertrand 定理对非完整系统的推广

在Whittaker的经典著作中,提到Bertrand于1852年得到的一个定理[22]:已知系统的一个第一积分,并可确定作用在系统上的力,假设力仅依赖于坐标,而不依赖于速度。这就是2.4节中命题1给出的结论。这是有关动力系统积分的一个重要性质,也是一个重要的动力学逆问题。Whittaker 指出:"但是,这个积分不能随意选取,而必须满足某些条件"。尽管如此,这种用极少信息就可用来研究动力学逆问题的方法仍是一个相当好的方法。Галиуллин在他的著作中,引入 Еругин 函数,将这一结果加以推广[23]。然而,这些研究还仅限于完整力学系统。本节研究 Bertrand 定理对非完整系统的推广。

6.7.1 非完整系统运动方程的显式

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.7.1}$$

系统的运动微分方程有如下形式,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n;\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{6.7.2}$$

将其展开为显式(6.3.3),即

$$
\ddot{q}_l = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{-[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \Big(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\Big)\dot{q}_k +
$$

$$
Q_s - \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\Big\}
$$

$$
(l,k,r,s = 1,2,\cdots,n;\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (6.7.3)
$$

将约束方程式(6.7.1) 对 t 求导数,得

$$
\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} = 0 \quad (\gamma = 1,2,\cdots,g;s = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.7.4)
$$

将式(6.7.3) 代入式(6.7.4),得到为确定乘子 λ_β 的代数方程

$$
\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} +
$$

$$
\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{-[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \Big(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\Big)\dot{q}_k +
$$

$$
Q_s + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\Big\} = 0
$$

$$
(\gamma,\beta = 1,2,\cdots,g;l,k,r,s = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.7.5)
$$

由此解得乘子 λ_β,简记作

$$
\lambda_\beta = a_{\beta s}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)Q_s + b_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)
$$

$$
(\beta = 1,2,\cdots,g;s = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.7.6)
$$

再将式(6.7.6) 代入式(6.7.3),便消除了乘子,得到 n 个二阶常微分方程。这 n 个二阶常微分方程称为与非完整系统式(6.7.1)、式(6.7.2) 相应的完整系统的运动方程。当相应完整系统运动的初始条件满足非完整约束方程式(6.7.1) 时,系统的解就给出非完整系统的运动。

6.7.2 广义力的确定

假设已知非完整系统的一个积分

$$
\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = C \qquad (6.7.7)
$$

其中 ω 对其所有变量有连续的偏导数。当 C 为任意常数时，式(6.7.7) 是系统的第一积分；当 C 为固定常数时，式(6.7.7) 是系统的特殊积分。将式(6.7.7) 对 t 求导数，并引入 Еругин 函数，得

$$\frac{\partial\omega}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s + \frac{\partial\omega}{\partial t} = \Phi(\omega,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.7.8}$$

当 C 为任意常数时，$\Phi = 0$；当 C 为固定常数时，Φ 为满足条件

$$\Phi\mid_{\omega=C} = 0$$

的任意函数。

将式(6.7.3) 和式(6.7.6) 代入式(6.7.8)，得到

$$\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}Q_s + \frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial\omega}{\partial t} - \Phi + \frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}$$

$$\left\{-[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k + \right.$$

$$\left.[a_{\beta k}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)Q_k + b_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)]\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right\} = 0$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g;l,k,r,s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.7.9}$$

将式(6.7.9) 简写成

$$a_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)Q_s + (\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - \Phi = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.7.10}$$

其中

$$a_s = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l} + \frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}a_{\beta s}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_k}$$

$$b = \frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial\omega}{\partial t} - \frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \right.$$

$$\left.\frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k + b_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right\} \tag{6.7.11}$$

关系式(6.7.10)对出现于其中任意独立的量，应是一个恒等式。因此，它对任意一个 $\dot{q}_k$ 的偏导数应等于零，这里假设 Q_s 不依赖于 $\dot{\boldsymbol{q}}$，于是得到

$$\frac{\partial a_s}{\partial \dot{q}_k}Q_k + \frac{\partial b}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k,s = 1,2,\cdots,n) \quad (6.7.12)$$

方程式(6.7.12)就是为确定广义力 Q_s 的 n 个代数方程。解此代数方程，便有可能确定广义力 Q_s。如果给定的积分式(6.7.7)是系统的第一积分，即 C 为任意常数，那么方程式(6.7.12)成为

$$\frac{\partial a_s}{\partial \dot{q}_k}Q_s + \frac{\partial b}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k,s = 1,2,\cdots,n) \quad (6.7.13)$$

上述结果可归纳为如下命题[24]。

命题 若已知非完整系统式(6.7.1)、式(6.7.2)的结构，但不知道广义力 Q_s。假设广义力不依赖于速度。当已知积分式(6.7.7)为第一积分时，系统的广义力 Q_s 由方程式(6.7.13)确定；当已知积分式(6.7.7)为特殊积分时，广义力 Q_s 由方程式(6.7.12)确定。

根据上述命题，就有可能在仅仅知道一个积分(第一积分或特殊积分)的情况下，来确定广义力。上述命题是Bertrand定理和参考文献[23]中一个结果的推广。

值得注意的是，由式(6.7.12)或式(6.7.13)不一定能够唯一确定所有的Q_s。这是因为，第一，方程式(6.7.12)中出现Еругин函数 Φ 对 $\dot{q}_k$ 的偏导数，而 Φ 除了满足条件 $\Phi|_{\omega=C}=0$ 外，仍是任意的；第二，如果 $\partial a_s/\partial \dot{q}_k$ 有一些为零，如 $\partial a_1/\partial \dot{q}_k = 0$，则式(6.7.12)或式(6.7.13)中将不出现 Q_1；第三，如果$\det(\partial a_s/\partial \dot{q}_k) = 0$。

6.7.3 算例

例1 设非完整系统的位形由三个广义坐标 q_1,q_2,q_3 来确定，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \tag{6.7.14}$$

所受非完整约束为

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 = 0 \tag{6.7.15}$$

已知系统的一个第一积分

$$\omega = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = h \tag{6.7.16}$$

假设广义力仅依赖于坐标,试求所受广义力 Q_1、Q_2 和 Q_3。

首先,利用方程式(6.7.5) 求出约束乘子 λ。由动能表达式(6.7.14) 可知

$$A_{ks} = \begin{cases} m & k = s \\ 0 & k \neq s \end{cases} \quad (k,s = 1,2,3)$$

而

$$\frac{\Delta_{sl}}{\Delta} = \begin{cases} \frac{1}{m} & s = l \\ 0 & s \neq l \end{cases} \quad (s,l = 1,2,3) \tag{6.7.17}$$

以及

$$[k,r;s] = 0 \tag{6.7.18}$$

又

$$B_s = T_0 = \frac{\partial A_{ks}}{\partial t} = 0 \tag{6.7.19}$$

由约束方程式(6.7.15),得

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2} = 2\dot{q}_2, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3} = -2\dot{q}_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_s} = 0(s = 1,2,3), \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{6.7.20}$$

将式(6.7.17) ~ 式(6.7.20) 代入式(6.7.5),得到

$$\frac{\lambda}{m}\{(2\dot{q}_1)^2 + (2\dot{q}_2)^2 + (-2\dot{q}_3)^2\} +$$

$$\frac{1}{m}(2\dot{q}_1 Q_1 + 2\dot{q}_2 Q_2 - 2\dot{q}_3 Q_3\} = 0$$

由此解得

$$\lambda = \frac{-\dot{q}_1 Q_1 - \dot{q}_2 Q_2 + \dot{q}_3 Q_3}{2(\dot{q}_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_3^2)} \tag{6.7.21}$$

其次，导出形如式(6.7.10)的代数方程。方程式(6.7.2)给出

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= Q_1 + 2\lambda\dot{q}_1 \\ m\ddot{q}_2 &= Q_2 + 2\lambda\dot{q}_2 \\ m\ddot{q}_3 &= Q_3 - 2\lambda\dot{q}_3 \end{aligned} \tag{6.7.22}$$

将式(6.7.21)代入式(6.7.22)，得

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= Q_1 + \frac{\dot{q}_1(-\dot{q}_1 Q_1 - \dot{q}_2 Q_2 + \dot{q}_3 Q_3)}{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} \\ m\ddot{q}_2 &= Q_2 + \frac{\dot{q}_2(-\dot{q}_1 Q_1 - \dot{q}_2 Q_2 + \dot{q}_3 Q_3)}{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} \\ m\ddot{q}_3 &= Q_3 - \frac{\dot{q}_3(-\dot{q}_1 Q_1 - \dot{q}_2 Q_2 + \dot{q}_3 Q_3)}{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} \end{aligned} \tag{6.7.23}$$

将第一积分式(6.7.16)对t求导数，因h是任意常数，故Еругин函数为零，有

$$m(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 + \dot{q}_3\ddot{q}_3) + mg\dot{q}_3 = 0 \tag{6.7.24}$$

将式(6.7.23)代入式(6.7.24)，并利用约束式(6.7.15)，得到

$$\dot{q}_1 Q_1 + \dot{q}_2 Q_2 + \dot{q}_3 Q_3 + mg\dot{q}_3 = 0 \tag{6.7.25}$$

这就是形如式(6.7.10)的代数方程。

最后，方程式(6.7.13)给出

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = -mg \tag{6.7.26}$$

如果给出问题的一个特殊积分为

$$\omega = \dot{q}_1/\dot{q}_2 = 1 \tag{6.7.27}$$

则式(6.7.10) 给出

$$\frac{Q_1\dot{q}_2 - Q_2\dot{q}_1}{m\dot{q}_2^2} - \Phi = 0 \tag{6.7.28}$$

或者写成

$$Q_1\dot{q}_2 - Q_2\dot{q}_1 - \Phi_1 = 0 \tag{6.7.29}$$

其中

$$\Phi_1 = m\dot{q}_2^2\Phi \tag{6.7.30}$$

而方程式(6.7.12) 成为

$$-Q_2 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{q}_1} = 0, Q_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{q}_2} = 0, -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{q}_3} = 0 \tag{6.7.31}$$

将式(6.7.31) 前两式代入式(6.7.29),得到

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 - \Phi_1 = 0 \tag{6.7.32}$$

它有解

$$\Phi_1 = \dot{q}_2\varphi(\dot{q}_1/\dot{q}_2, q_1, q_2, q_3, t) \tag{6.7.33}$$

其中 φ 为任意函数。但按 Еругин 函数的要求,有

$$\Phi \mid_{\dot{q}_1/\dot{q}_2 = 1} = 0$$

即

$$\varphi(1, q_1, q_2, q_3, t) = 0 \tag{6.7.34}$$

例如,可取

$$\Phi_1 = (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)\psi(q_1, q_2, q_3, t) \tag{6.7.35}$$

式中:ψ 为任意函数。于是由方程式(6.7.31) 得

$$Q_1 = Q_2 = \psi(q_1, q_2, q_3, t) \tag{6.7.36}$$

例2　一雪橇在水平面上滑动。雪橇质心 C 在平面上的投影

和雪橇与平面的接触点相重合。令 m 和 J 分别表示雪橇质量和它对质心轴的转动惯量。系统的位置由三个参数确定:质心在平面上投影的坐标(q_1,q_2)以及雪橇对称轴与固定轴夹角 q_3。参考文献[9] 称这个模型为花样滑冰运动。已知系统有一个第一积分

$$\omega = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}J\dot{q}_3^2+V(q_1,q_2,q_3) = h \tag{6.7.37}$$

假设广义力 Q_1、Q_2 和 Q_3 仅依赖于坐标,试确定这些广义力。

问题的非完整约束表示雪橇不允许横滑,有

$$f = \dot{q}_2 - \dot{q}_1\tan q_3 = 0 \tag{6.7.38}$$

通过计算,容易得到式(6.7.10) 的表达式为

$$\dot{q}_1Q_1+\dot{q}_2Q_2+\dot{q}_3Q_3+\frac{\partial V}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial V}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial V}{\partial q_3}\dot{q}_3 = 0 \tag{6.7.39}$$

这是因为 h 为任意常数,$\Phi = 0$。方程式(6.7.13) 给出为

$$Q_1+\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0,Q_2+\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0,Q_3+\frac{\partial V}{\partial q_3} = 0 \tag{6.7.40}$$

由此求得广义力

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1},\quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2},\quad Q_3 = -\frac{\partial V}{\partial q_3} \tag{6.7.41}$$

6.8 非完整系统的对称性与动力学逆问题

本节研究非完整系统的 Noether 对称性以及与其相关的动力学逆问题,包括广义 Noether 定理与非完整动力学正问题、广义 Noether 定理与非完整动力学逆问题等。

6.8.1 广义 Noether 定理与非完整动力学正问题

取时间和坐标的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$

$$(s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.8.1}$$

对非完整系统式(6.1.3)、式(6.1.7)，广义 Noether 定理有如下结果。

命题1 如果无限小生成元ξ_s、ξ_0和规范函数$G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足广义 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0$$

$$(s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.8.2}$$

同时ξ_s、ξ_0满足限制条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g; s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.8.3}$$

则非完整系统存在 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \text{常数} \tag{6.8.4}$$

与广义 Noether 等式相应的广义 Killing 方程有如下形式，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) +$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\frac{\partial G_N}{\partial t} - \frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{6.8.5}$$

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(k,s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.8.6}$$

命题2 如果无限小生成元ξ_s、ξ_0和规范函数$G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足广义 Killing 方程式(6.8.5)、式(6.8.6)，以及限制条件式

(6.8.3)，则非完整系统存在 Noether 守恒量式(6.8.4)。

与广义 Noether 对称性相关的动力学正问题是指，对已知的动力学函数 L、Q_s、f_β，由广义 Noether 式(6.8.2)或广义 Killing 方程式(6.8.5)、式(6.8.6)，以及限制条件式(6.8.3)，来求无限小变换的生成元 ξ_s、ξ_0 和规范函数 G_N，进而求得 Noether 守恒量[16]。

6.8.2 广义 Noether 定理与非完整动力学逆问题

广义 Noether 定理可用于研究非完整动力学逆问题。与此相关，动力学逆问题的一般提法如下：假设已知非完整系统的第一积分

$$\omega(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = C \tag{6.8.7}$$

利用广义 Killing 方程式(6.8.5)、式(6.8.6) 来求无限小变换的生成元 ξ_s、ξ_0 和规范函数，并求出系统的 Lagrange 函数 L、非势广义力 Q_s 以及非完整约束方程的形式 f_β。

为解上述逆问题，首先令积分式(6.8.7) 为 Noether 守恒量式(6.8.4)，即

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \omega \tag{6.8.8}$$

将式(6.8.8) 对 $\dot{q}_k$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\xi_0 + L\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} - \delta_{sk}\xi_0 - \dot{q}_s\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_k} \tag{6.8.9}$$

将式(6.8.9) 与式(6.8.6) 相减，得

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_k} \tag{6.8.10}$$

令

$$W_{sk} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \tag{6.8.11}$$

由式(6.8.10)求得

$$\xi_s = \bar{\xi}_s - \dot{q}_s\xi_0 = W^{sk}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_k} \quad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{6.8.12}$$

其中

$$W^{sr}W_{rk} = \delta_k^s \tag{6.8.13}$$

式(6.8.12)给出 Lagrange 函数 L,生成元 ξ_s、ξ_0 和给定积分 ω 之间的关系。

其次,将式(6.8.8)对 t 求偏导数,得

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + L\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial t} - \dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right) + \frac{\partial G_N}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial t} \tag{6.8.14}$$

再将式(6.8.8)对 q_k 求偏导数再乘以 $\dot{q}_k$ 并对 k 求和,得

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k\xi_0 + L\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \tag{6.8.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k - \dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k = \frac{\partial\omega}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

将式(6.8.14)、式(6.8.15)相加,并与式(6.8.5)相减,得

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k\right)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{6.8.16}$$

再将式(6.8.12)代入式(6.8.16),得

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s\right)W^{sr}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_r} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad (s,r,k=1,2,\cdots,n) \tag{6.8.17}$$

它给出动力学函数 L、Q_s 与给定积分之间的关系。

这样,式(6.8.12)和式(6.8.17)便是求解动力学逆问题的基本关系式。由这$(n+1)$个关系式,便有可能求得生成元 ξ_s、ξ_0 以

及动力学函数 L、Q_s。然后，由式(6.8.8) 求得规范函数 G_N，由式(6.8.3) 求得约束形式 f_β。显然，这类逆问题没有唯一解。

6.8.3 算例

例1　一单位质量质点在一平面上运动，其位形由广义坐标 q_1、q_2 确定，并且非势广义力为零。已知系统有一个第一积分

$$\omega = -bt\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + bq_1 = C \tag{6.8.18}$$

试求系统的 Lagrange 函数 L，非完整约束的形式 f 以及无限小变换的生成元 ξ_1、ξ_2、ξ_0 和规范函数 G_N。

式(6.8.12) 给出

$$\begin{aligned} \xi_1 - \dot{q}_1\xi_0 &= W^{11}(-bt) + W^{12} \\ \xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 &= W^{21}(-bt) + W^{22} \end{aligned} \tag{6.8.19}$$

式(6.8.17) 给出

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2}\dot{q}_2 - \frac{\partial L}{\partial q_1} - Q_1\right)[W^{11}(-bt) + W^{12}] + \\ &\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial q_2}\dot{q}_2 - \frac{\partial L}{\partial q_2} - Q_2\right)[W^{21}(-bt) + W^{22}] = 0 \end{aligned} \tag{6.8.20}$$

因假设非势广义力为零，故有 $Q_1 = Q_2 = 0$。今取

$$W^{11} = W^{22} = 1, W^{12} = W^{21} = 0 \tag{6.8.21}$$

以及

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + U(q_1, q_2) \tag{6.8.22}$$

则式(6.8.20) 成为

$$-\frac{\partial U}{\partial q_1}(-bt) - \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0 \tag{6.8.23}$$

它有解

$$U = 0 \tag{6.8.24}$$

式(6.8.19) 给出

$$\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0 = -bt \quad \xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 = 1 \tag{6.8.25}$$

它有解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -bt, \xi_2 = 1 \tag{6.8.26}$$

再将式(6.8.18)、式(6.8.22)、式(6.8.24)、式(6.8.26) 代入式(6.8.8),得

$$\dot{q}_1(-bt) + \dot{q}_2 + G_N = -bt\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + bq_1$$

由此求得规范函数

$$G_N = bq_1 \tag{6.8.27}$$

最后,将式(6.8.26) 代入限制条件式(6.8.3),得

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}(-bt) + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2} = 0 \tag{6.8.28}$$

它有解

$$f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 + g(t, q_1, q_2) \tag{6.8.29}$$

式中:g 为任意函数。

例 2　已知 Чаплыгин 雪橇问题有一个第一积分

$$\omega = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 + V(q_1, q_2, q_3) = h \tag{6.8.30}$$

而非完整约束有如下形式,即

$$f = \dot{q}_2 - \dot{q}_1\tan q_3 = 0 \tag{6.8.31}$$

试求系统的 Lagrange 函数 L,广义力 Q_1、Q_2、Q_3 以及无限小生成元 ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_0 和规范函数 G_N。

式(6.8.3) 给出

$$-\xi_1\tan q_3 + \xi_2 = 0 \tag{6.8.32}$$

式(6.8.12) 给出

$$\bar{\xi}_1 = W^{11}(m\dot{q}_1) + W^{12}(m\dot{q}_2) + W^{13}(J\dot{q}_3)$$

$$\bar{\xi}_2 = W^{21}(m\dot{q}_1) + W^{22}(m\dot{q}_2) + W^{23}(J\dot{q}_3) \tag{6.8.33}$$

$$\bar{\xi}_3 = W^{31}(m\dot{q}_1) + W^{32}(m\dot{q}_2) + W^{33}(J\dot{q}_3)$$

取

$$W^{11} = W^{22} = \frac{1}{m}, W^{33} = \frac{1}{J}, W^{sk} = 0 \quad (s \neq k) \tag{6.8.34}$$

则有

$$\bar{\xi}_1 = \dot{q}_1, \quad \bar{\xi}_2 = \dot{q}_2, \quad \bar{\xi}_3 = \dot{q}_3 \tag{6.8.35}$$

可取

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 \tag{6.8.36}$$

因此,式(6.8.17)给出

$$-Q_1\dot{q}_1 - Q_2\dot{q}_2 - Q_3\dot{q}_3 = \frac{\partial V}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3}\dot{q}_3 \tag{6.8.37}$$

它有解

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad Q_3 = -\frac{\partial V}{\partial q_3} \tag{6.8.38}$$

取

$$\xi_0 = -1 \tag{6.8.39}$$

则有

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{6.8.40}$$

将式(6.8.36)、式(6.8.39)、式(6.8.40)代入式(6.8.8),得

$$G_N = V(q_1, q_2, q_3) \tag{6.8.41}$$

6.9 Szebehely 问题对非完整系统的推广

1977 年 Szebehely 研究了给定平面上一质点运动的轨线簇

来确定质点力函数的动力学逆问题，得到了关于力函数的一个一阶线性偏微分方程。后来一些学者将这一结果推广到了 3 维和 n 维空间[25,26]。本节研究 Szebehely 问题对非完整系统的推广，提出并解决一个非完整动力学逆问题。首先，将非完整系统带乘子的方程表示为显式，并将其当作有条件的完整力学问题来研究，得到一个二阶常微分方程组；其次，讨论一类非完整系统的 Szebehely 逆问题，给定系统的一类带$(n-1)$个参数的轨线簇及系统的约束方程，得到为确定力函数 U 的$(n-1)$个关于 U 的一阶线性偏微分方程；最后，举例说明结果的应用。

6.9.1 非完整系统运动方程的显式

假设力学系统所受完整约束是定常的，其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{6.9.1}$$

系统的运动微分方程表示为带乘子的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$
$$(s=1,2,\cdots,n;\beta=1,2,\cdots,g) \tag{6.9.2}$$

其中

$$T=\frac{1}{2}A_{sk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_s\dot{q}_k \quad (s,k=1,2,\cdots,n)$$

为系统的动能，$U=U(\boldsymbol{q})$ 为系统所受力的力函数，λ_β 为约束乘子。方程式(6.9.2)可表示为显式，有

$$A_{sk}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_k+[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m=\frac{\partial U}{\partial q_s}+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$
$$(s,k,m=1,2,\cdots,n;\beta=1,2,\cdots,g) \tag{6.9.3}$$

由此解得广义加速度

$$\ddot{q}_l = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m + \frac{\partial U}{\partial q_s} + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right\} \qquad (6.9.4)$$

其中

$$\Delta = \det(A_{sk})_{n\times n} \neq 0$$

而Δ_{sl}为Δ元素(s,l)的代数余子式。将约束方程式(6.9.1)对t求导数,得到

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l = 0 \quad (\gamma = 1,2,\cdots,g;l = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.5)$$

将式(6.9.4)代入式(6.9.5),得到为确定乘子λ_β的代数方程

$$\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m + \frac{\partial U}{\partial q_s}\right\} = 0$$

$$(\gamma,\beta = 1,2,\cdots,g;l,s,k,m = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.6)$$

解方程式(6.9.6),得到

$$\lambda_\beta = -\frac{\tilde{\Delta}_{\gamma\beta}}{\tilde{\Delta}}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l - \frac{\tilde{\Delta}_{\gamma\beta}}{\tilde{\Delta}}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m + \frac{\partial U}{\partial q_s}\right\}$$

$$(\gamma,\beta = 1,2,\cdots,g;l,s,k,m = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.7)$$

其中

$$\tilde{\Delta} = \det\left(\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)_{g\times g} \neq 0$$

而$\tilde{\Delta}_{\gamma\beta}$为$\tilde{\Delta}$中元素$(\gamma,\beta)$的代数余子式。

将式(6.9.7)代入式(6.9.4),得到

$$\ddot{q}_l = H_l(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + G_{ls}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (l,s = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.8)$$

其中

$$H_l(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\Big\{-[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m - \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\frac{\tilde{\Delta}_{\gamma\beta}}{\tilde{\Delta}}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_j}\dot{q}_j +$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\frac{\tilde{\Delta}_{\gamma\beta}}{\tilde{\Delta}}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_j}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}[k,m;i]\dot{q}_k\dot{q}_m\Big\}$$

$$G_{ls}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left(1 - \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_i}\frac{\tilde{\Delta}_{\gamma\beta}}{\tilde{\Delta}}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_j}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\right)$$

$$(\gamma,\beta = 1,2,\cdots,g;l,s,k,m,i,j = 1,2,\cdots,n)$$

方程式(6.9.8)可以看成是某一个完整系统的运动方程,称这个完整系统为与非完整系统式(6.9.1)、式(6.9.2)相应的完整系统。如果运动的初始条件满足约束方程,即

$$f_\beta(\boldsymbol{q}_0,\dot{\boldsymbol{q}}_0) = 0 \tag{6.9.9}$$

则由式(6.9.9)和式(6.9.8)可确定非完整系统式(6.9.1)、式(6.9.2)的运动。

6.9.2 非完整系统的 Szebehely 问题

假设约束方程式(6.9.1)对速度是齐次的,即满足条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = k_\beta f_\beta \quad (\beta = 1,2,\cdots,g;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.9.10}$$

式中:k_β 为齐次性阶,右端对 β 不求和。

考虑如下动力学逆问题[27]:已知系统的轨线簇

$$\varphi_\mu(\boldsymbol{q}) = C_\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,n-1) \tag{6.9.11}$$

和满足条件式(6.9.10)的约束方程式(6.9.1),来确定系统的力函数 $U = U(\boldsymbol{q})$。

为解上述逆问题,将式(6.9.11)对 t 求导数,得

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,n-1;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.9.12}$$

由这$(n-1)$个方程解出$(n-1)$个$\dot{q}_\mu(\mu=1,2,\cdots,n-1)$，有

$$\dot{q}_\mu = M_\mu(\boldsymbol{q})\dot{q}_n \quad (\mu=1,2,\cdots,n-1) \qquad (6.9.13)$$

其中

$$M_\mu(\boldsymbol{q}) = \frac{\Delta'_{\mu'\mu}}{\Delta'}\frac{\partial\varphi_{\mu'}}{\partial q_n}$$

$$\Delta' = \det\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_{\mu'}}\right)_{(n-1)\times(n-1)}$$

而$\Delta'_{\mu'\mu}$为Δ'元素(μ',μ)的代数余子式。令

$$M_n(\boldsymbol{q}) = 1$$

再结合式(6.9.13)，有

$$\dot{q}_s = M_s(\boldsymbol{q})\dot{q}_n \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.14)$$

将式(6.9.12)对t求导数，得

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_l}\ddot{q}_l + \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s = 0 \quad (l,k,s=1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.15)$$

将式(6.9.13)代入式(6.9.8)，得到

$$\ddot{q}_l = \overline{H}_l(\boldsymbol{q})\dot{q}_n^2 + \overline{G}_{ls}(\boldsymbol{q})\frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (l,s=1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.16)$$

其中

$$\overline{H}_l(\boldsymbol{q}) = H_l(\boldsymbol{q},M(\boldsymbol{q}))$$

$$\overline{G}_{ls}(\boldsymbol{q}) = G_{ls}(\boldsymbol{q},M(\boldsymbol{q}))$$

将式(6.9.13)和式(6.9.16)代入式(6.9.15)，得

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_l}\overline{G}_{ls}\frac{\partial U}{\partial q_s} + \left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_l}\overline{H}_l + \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial q_l\partial q_s}M_lM_s\right)\dot{q}_n^2 = 0$$

$$(\mu=1,2,\cdots,n-1;l,s=1,2,\cdots,n) \qquad (6.9.17)$$

由约束方程式(6.9.1)、式(6.9.10)及方程式(6.9.2)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T-U)=\lambda_{\beta}k_{\beta}f_{\beta}=0 \tag{6.9.18}$$

因此,系统有能量积分

$$T-U=h \tag{6.9.19}$$

由此推得

$$\dot{q}_n^2=\frac{2(U+h)}{A_{sl}M_sM_l}\quad(l,s=1,2,\cdots,n) \tag{6.9.20}$$

最后,将式(6.9.20)代入式(6.9.17),消去$\dot{q}_n^2$,得到

$$\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial q_l}\overline{G}_{ls}\frac{\partial U}{\partial q_s}+\frac{2(U+h)}{A_{sl}M_sM_l}\left(\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial q_l}\overline{H}_l+\frac{\partial^2\varphi_{\mu}}{\partial q_l\partial q_s}M_lM_s\right)=0$$

$$(\mu=1,2,\cdots,n-1;l,s=1,2,\cdots,n) \tag{6.9.21}$$

方程式(6.9.21)是关于力函数U的$(n-1)$个一阶偏微分方程,这就是Szebehely方程对非完整系统的一个推广[27]。由方程式(6.9.21)找到力函数U,就解决了逆问题。

6.9.3 算例

一单位质量的质点在势力场中运动,它的运动受有一个非完整约束

$$\dot{q}_3^2=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2 \tag{6.9.22}$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$$

给定一轨线簇

$$\begin{aligned}f_1(q_1,q_2,q_3)&=C_1\\f_2(q_1,q_2,q_3)&=C_2\end{aligned} \tag{6.9.23}$$

试求系统的力函数$U(\boldsymbol{q})$。

对此系统,方程式(6.9.21)给出

$$
\begin{aligned}
&(1+M_1^2+M_2^2)\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}+\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)+\\
&\left(M_1\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+M_2\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial q_3}-M_1\frac{\partial U}{\partial q_1}-M_2\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\\
&2(U+h)\left(2\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}M_1M_2+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_3}M_1+\right.\\
&\left.2\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2\partial q_3}M_2+\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}M_1^2+\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2}M_2^2+\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}\right)=0\\
&(1+M_1^2+M_2^2)\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)+\\
&\left(M_1\frac{\partial f_2}{\partial q_1}+M_2\frac{\partial f_2}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial q_3}-M_1\frac{\partial U}{\partial q_1}-M_2\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\\
&2(U+h)\left(2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}M_1M_2+2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_3}M_1+\right.\\
&\left.2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2\partial q_3}M_2+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}M_1^2+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2}M_2^2+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}\right)=0 \qquad (6.9.24)
\end{aligned}
$$

其中

$$
M_1=\frac{-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\frac{\partial f_1}{\partial q_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{\partial f_2}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial q_2}},\quad M_2=\frac{-\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{\partial f_2}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial q_3}}{\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{\partial f_2}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial q_2}}
$$

方程式(6.9.24)就是关于力函数 U 的偏微分方程。解此方程,就有可能找到系统的力函数。

若取轨线簇式(6.9.23)为

$$
q_1-h_1q_3=C_1,q_2-h_2q_3=C_2 \qquad (6.9.25)
$$

式中:h_1、h_2 为常数,则方程式(6.9.24)成为

$$
(1-h_1^2+h_2^2)\frac{\partial U}{\partial q_1}-2h_1h_2\frac{\partial U}{\partial q_2}+h_1(1-h_1^2-h_2^2)\frac{\partial U}{\partial q_3}=0
$$

$$-2h_1h_2\frac{\partial U}{\partial q_1}+(1+h_1^2-h_2^2)\frac{\partial U}{\partial q_2}+h_2(1-h_1^2-h_2^2)\frac{\partial U}{\partial q_3}=0 \tag{6.9.26}$$

如果

$$h_1^2+h_2^2\neq 1$$

则方程式(6.9.26)给出

$$h_2\frac{\partial U}{\partial q_1}-h_1\frac{\partial U}{\partial q_2}=0,\quad h_2\frac{\partial U}{\partial q_3}+\frac{\partial U}{\partial q_2}=0 \tag{6.9.27}$$

方程式(6.9.27)的一般解为

$$U=\varphi_1(h_1q_1+h_2q_2-q_3) \tag{6.9.28}$$

式中：φ_1 为 $h_1q_1+h_2q_2-q_3$ 的任意函数。

如果

$$h_1^2+h_2^2=1$$

则由方程式(6.9.26)导出

$$h_2\frac{\partial U}{\partial q_1}-h_1\frac{\partial U}{\partial q_2}=0 \tag{6.9.29}$$

方程式(6.9.29)的一般解为

$$U=\varphi_2(h_1q_1+h_2q_2,q_3) \tag{6.9.30}$$

6.10 变质量非完整系统的广义 Мещерский 问题

本节研究变质量非完整系统的广义 Мещерский 问题，包括变质量非完整动力学正问题，以及广义 Мещерский 问题的提法与解法。

6.10.1 变质量非完整动力学正问题

由于空间技术以及其他工业技术的发展，变质量系统动力学

的研究越来越显得重要。喷气飞机、火箭、卫星、航天器等，一般都是变质量系统。运动中的车辆，由于燃料消耗或喷射气体、液体等使质量不断减少，就是一类变质量非完整系统。变质量非完整动力学的研究已取得重要进展，如参考文献[4,28]。

研究由 N 个质点所组成的力学系统。在瞬时 t，第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,N)$；在瞬时 $t+\mathrm{d}t$，由质点分离（或并入）的微粒的质量为 $\mathrm{d}m_i$。第 i 个质点的运动微分方程写成 Мещерский 形式

$$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=0\quad(i=1,2,\cdots,N)\tag{6.10.1}$$

式中：$\boldsymbol{r}_i$ 为点的矢径；$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为点的加速度；$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在质点上所有力的合力；$\boldsymbol{R}_i$ 为反推力，即

$$\boldsymbol{R}_i=\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i\tag{6.10.2}$$

而 $\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对质点的速度。变质量力学系统的 d'Alembert-Lagrange 原理为

$$\{-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i\}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0\tag{6.10.3}$$

在广义坐标下表示为

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s+P_s\right)\delta q_s=0\tag{6.10.4}$$

其中

$$P_s=(\boldsymbol{R}_i+m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial\dot{q}_s}\right)\tag{6.10.5}$$

如果系统的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{6.10.6}$$

则系统的运动方程有如下形式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+P_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}$$

$$(s = 1,2,\cdots,n;\beta = 1,2,\cdots,g) \quad (6.10.7)$$

除上述方程外，还有其他各种形式[4,28]。

变质量非完整系统动力学问题，可分为正问题和逆问题。正问题是指，给定系统的动力学函数 T、Q_s、f_β 以及质量的变化规律，来求系统的运动性质和问题的最终解。例如，研究系统的对称性与守恒量、稳定性等。

6.10.2 广义 Мещерский 问题的提法

Мещерский 研究的变质量质点动力学逆问题可以推广到非完整系统中去。

假设所受非完整约束为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t)$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g;\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g;s = 1,2,\cdots,n) \quad (6.10.8)$$

设质点的质量仅依赖于时间，即设

$$m_i = m_i(t) \quad (6.10.9)$$

系统的运动方程可表示为 Maggi 形式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma - P_\sigma + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - Q_{\varepsilon+\beta} - P_{\varepsilon+\beta}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\beta = 1,2,\cdots,g;\varepsilon = n - g) \quad (6.10.10)$$

其中

$$P_s = m_i(\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n;i = 1,2,\cdots,N) \quad (6.10.11)$$

现在提出非完整动力学的一个逆问题：已知约束方程式(6.10.8)、系统的动能形式、广义力以及运动性质，来求质量变化

规律 $m_i = m_i(t)$ 以及微粒的相对速度 $\boldsymbol{u}_i$。

上述问题可称为广义 Мещерский 问题。

6.10.3 广义 Мещерский 问题的解法

为解上述动力学逆问题,可将方程式(6.10.10)展开为显式,其中出现 $m_i, \dot{m}_i, \boldsymbol{u}_i$ 等量,而这些量就是待求量。如果方程式(6.10.10)的数目与这些待求量的数目相等,则问题可能唯一确定;否则,需要施加另外一些补充条件。

下面举例说明解法的应用[19]。

在 Чаплыгин 雪橇对称轴 PC 上的 B 点有一变质量质点 $m = m(t)$。设雪橇质量为 M,相对质心轴的转动惯量为 J_c。系统的位置由接触点 P 的坐标 (x,y) 以及 PC 与 Ox 轴的夹角 θ 来确定,并令 $PC = a, PB = b$。设微粒分离的相对速度 $\boldsymbol{u}$ 与 PC 成 α 角。若已知运动规律 $x = \varphi_1(t), \theta = \varphi_2(t)$,试求质量变化规律 $m = m(t)$ 以及分离相对速度 $\boldsymbol{u}$ 的大小。

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}M[(\dot{x} - a\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{y} + a\dot{\theta}\cos\theta)^2] +$$

$$\frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(t)[(\dot{x} - b\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{y} + b\dot{\theta}\cos\theta)^2] \tag{6.10.12}$$

非完整约束方程为

$$\dot{y} - \dot{x}\tan\theta = 0 \tag{6.10.13}$$

广义力为

$$Q_x = Q_y = Q_\theta = 0 \tag{6.10.14}$$

广义反推力为

$$P_s = \dot{m}(\boldsymbol{u} + \dot{\boldsymbol{r}}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_s}$$

因

$$u = -u\cos(\theta+\alpha)\boldsymbol{i} - u\sin(\theta+\alpha)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r} = (x + b\cos\theta)\boldsymbol{i} + (y + b\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

故有

$$\begin{aligned} P_x &= \dot{m}[\dot{x} - b\dot{\theta}\sin\theta - u\cos(\theta+\alpha)] \\ P_y &= \dot{m}[\dot{y} + b\dot{\theta}\cos\theta - u\sin(\theta+\alpha)] \\ P_\theta &= \dot{m}(b^2\dot{\theta} - bu\sin\alpha) \end{aligned} \quad (6.10.15)$$

将式(6.10.12) ~ 式(6.10.15) 代入式(6.10.10),得

$$\frac{1}{\cos^2\theta}[M + m(t)](\ddot{x} + \dot{x}\dot{\theta}\tan\theta) - \frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta}[Ma + m(t)b] = -\dot{m}u\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$$

$$[J_c + Ma^2 + m(t)b^2]\ddot{\theta} + \frac{\dot{x}\dot{\theta}}{\cos\theta}[Ma + m(t)b] = -\dot{m}ub\sin\alpha$$

(6.10.16)

将 $x = \varphi_1(t), \theta = \varphi_2(t)$ 代入方程式(6.10.16),并将两个方程相除,消去 u,得到

$$m(t) = \frac{\left[(J_c + Ma^2)\ddot{\varphi}_2 + \dfrac{\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2}{\cos^2\varphi_2}Ma\right]\dfrac{\cos\alpha}{b\cos\varphi_2\sin\alpha} - \dfrac{M}{\cos^2\varphi_2}(\ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\tan\varphi_2)\dfrac{Ma\dot{\varphi}_2^2}{\cos\varphi_2}}{\dfrac{1}{\cos^2\varphi_2}(\ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\tan\varphi_2) - \dfrac{b\dot{\varphi}_2^2}{\cos^2\varphi_2} - \left(b\ddot{\varphi}_2 + \dfrac{\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2}{\cos\varphi_2}\right)\dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_2\sin\alpha}}$$

(6.10.17)

由方程式(6.10.16) 的第二个得到

$$u = -\frac{1}{\dot{m}b\sin\alpha}\left\{[J_c + Ma^2 + m(t)b^2]\ddot{\varphi}_2 + \frac{\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2}{\cos\varphi_2}[Ma + m(t)b]\right\}$$

(6.10.18)

其中 m、$\dot{m}$ 由式(6.10.17) 给出。这样，式(6.10.17) 和式(6.10.18)就是问题的解。

6.11 二阶线性非完整动力学逆问题

高于一阶的非完整约束称为高阶非完整约束。参考文献[2]指出的刚体定点运动角速度矢量的广义进动条件作为非完整约束,参考文献[9] 指出的飞船以加速度模为常数的运动,都是二阶非完整约束。前者是线性的,后者是非线性的。当然,这些高阶约束的物理实现,一般要通过控制。本节研究二阶线性非完整动力学逆问题,包括系统的运动方程以及两类动力学逆问题。

6.11.1 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1,2,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想二阶线性非完整约束

$$\omega_\beta = \alpha_{\beta s}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\ddot{q}_s + b_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = 0$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g;s = 1,2,\cdots,n) \qquad (6.11.1)$$

系统的运动方程有如下形式,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta a_{\beta s} \quad (s = 1,2,\cdots,n;\beta = 1,2,\cdots,g) \qquad (6.11.2)$$

式中:λ_β 为约束乘子。

二阶非完整系统动力学问题有两类:一类是正问题;另一类是逆问题。正问题是指,由约束方程式(6.11.1) 和运动方程式(6.11.2),来求问题的积分或最终的解。逆问题是指,由已知积分来组建或修改运动方程。

6.11.2 运动方程的组建

已知系统的约束方程为式(6.11.1),并且已知系统有(m −

g）个积分

$$\omega_\nu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = C_\nu \quad (\nu = g+1,g+2,\cdots,m;m \leqslant n) \tag{6.11.3}$$

设 ω_ν 彼此相容且独立，对其中变量有连续一阶偏导数，并设 ω_ν 与 ω_β 彼此相容且独立。

现在提出二阶线性非完整系统动力学的第一类问题：根据约束方程式(6.11.1) 和积分式(6.11.3) 来组建系统的运动微分方程[30]。

为解这类逆问题，将式(6.11.3) 对 t 求导数，并引入 Еругин 函数，有

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \omega_\nu}{\partial t} = \varPhi_\nu(\omega,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$$

$$(\nu = g+1,g+2,\cdots,m;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.11.4}$$

式中：$\varPhi_\nu$ 为 Еругин 函数。当 $C_\nu \neq 0$ 时，即关系式(6.11.3) 为第一积分时，有 $\varPhi_\nu = 0$；当 $C_\nu = 0$ 时，即关系式(6.11.3) 为特殊积分时，$\varPhi_\nu$ 为满足

$$\varPhi_\nu(0,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = 0 \tag{6.11.5}$$

的任意函数。式(6.11.4) 是力学系统按运动性质式(6.11.3) 而运动的必要条件。

组建运动方程的问题，通常归结为寻求系统的广义加速度 $\ddot{\boldsymbol{q}}$。假设由式(6.11.1) 和式(6.11.4) 可解出 m 个 $\ddot{q}$，记作

$$\ddot{q}_r = \frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\varPhi_l - \frac{\partial \omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial \omega_l}{\partial t}\right) - \frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k$$

$$(r,l = 1,2,\cdots,m;k = m+1,m+2,\cdots,n;s = 1,2,\cdots,n) \tag{6.11.6}$$

其中

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial \omega_l}{\partial \dot{q}_r}\right)_{m\times m}$$

而 Δ_{lr} 为 Δ 元素 (l,r) 的代数余子式,Δ^{rk} 为 Δ 中第 r 列用式(6.11.1)、式(6.11.3) 中矩阵的第 k 列替代所得行列式,并且有记号

$$\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\dot{q}_r} = a_{\beta r}, \Phi_\beta - \frac{\partial\omega_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial\omega_\beta}{\partial t} = -b_\beta$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g; r,s = 1,2,\cdots,n)$$

所组建的运动方程式(6.11.6) 的左端为广义加速度,右端则代表广义力、广义约束反力,甚至还可能包含另一部分广义加速度。组建运动方程的这类逆问题,一般说没有唯一解。这是因为,首先,当 $m < n$ 时,由式(6.11.6) 不能求出全部的广义加速度 $\ddot{q}_s$ $(s = 1,2,\cdots,n)$;其次,如果积分式(6.11.3) 中有一个或几个特殊积分时,Еругин 函数 Φ_l 不全为零。仅在 $m = n$,且所有 $C_\nu \neq 0(\nu = g+1, g+2,\cdots,m)$ 时,才可能有唯一解。这种非唯一解允许根据具体问题的其他要求(如稳定性、优化等),来施加一些补充条件而最终组建系统的运动方程。

6.11.3 运动方程的修改

利用参考文献[4] 的方法,容易将方程式(6.11.2) 表示为显式,有

$$\ddot{q}_l = \frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-[k,r;s]\dot{q}_k\dot{q}_r + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k - \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k + Q_s + \lambda_\beta a_{\beta s}\right\}$$

$$(\beta = 1,2,\cdots,g; l,k,r,s = 1,2,\cdots,n) \quad (6.11.7)$$

其中

$$\Delta = \det(A_{ks}) \neq 0$$

A_{ks} 为动能中广义速度二次型系数,Δ_{sl} 为 Δ 元素 (s,l) 的代数余子式,B_s 为动能中广义加速度一次型系数,T_0 为动能中不含广义速度的项,而

$$[k,r;s] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_r} + \frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial q_s}\right) \tag{6.11.8}$$

现在提出二阶线性非完整系统动力学的第二类逆问题:运动方程的修改,即已知系统的动能表达式,约束方程式(6.11.1)以及$(m-g)$个积分式(6.11.3),试确定广义力Q_s及约束乘子λ_β。实际上,此问题乃是已知运动方程的结构式(6.11.7),根据积分式(6.11.3)来确定其中的未知参数Q_s和λ_β[30]。

为解这类逆问题,首先将式(6.11.3)对时间t求导数,并引入Еругин函数而得到关系式(6.11.4);然后,将式(6.11.7)代入式(6.11.1)和式(6.11.4),便得到为确定$(n+g)$个参数Q_s和λ_β的m个代数方程。因此,一般说这类逆问题没有唯一解。

6.11.4 算例

例1 一单位质量的质点在空间中运动。令$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$,它的运动受有一个双面理想二阶线性非完整约束

$$-q_1\ddot{q}_1 - q_2\ddot{q}_2 + q_3\ddot{q}_3 = 0 \tag{6.11.9}$$

已知系统有两个第一积分

$$\omega_2 = q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_3 = C_2 \neq 0 \tag{6.11.10}$$

$$\omega_3 = q_1\dot{q}_2 + q_2\dot{q}_3 = C_3 \neq 0 \tag{6.11.11}$$

试组建问题的运动方程。

利用式(6.11.6),对此问题,有

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial \omega_l}{\partial \dot{q}_r}\right) = \begin{vmatrix} -q_1 & -q_2 & q_3 \\ q_2 & 0 & q_1 \\ 0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = q_1^3 + q_2^3 + q_1q_2q_3 \tag{6.11.12}$$

其代数余子式为

$$\Delta_{11} = -q_1^2, \Delta_{12} = -q_2^2, \Delta_{13} = q_1q_2$$

$$\Delta_{21} = q_2^2 + q_1 q_3, \Delta_{22} = -q_1 q_2, \Delta_{23} = q_1^2$$

$$\Delta_{31} = -q_1 q_2, \Delta_{32} = q_1^2 + q_2 q_3, \Delta_{33} = q_2^2 \quad (6.11.13)$$

因 $m = n = 3$,故

$$\Delta^{rk} = 0 \quad (6.11.14)$$

又 $C_2 \neq 0, C_3 \neq 0$,故 Еругин 函数取为

$$\Phi_2 = \Phi_3 = 0 \quad (6.11.15)$$

将式(6.11.12) ~ 式(6.11.15) 代入式(6.11.6),得到

$$\ddot{q}_1 = [-(q_2^2 + q_1 q_3)\dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + q_1 q_2 \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)]/(q_1^3 + q_2^3 + q_1 q_2 q_3)$$

$$\ddot{q}_2 = [q_1 q_2 \dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (q_1^2 + q_2 q_3)\dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)]/(q_1^3 + q_2^3 + q_1 q_2 q_3)$$

$$\ddot{q}_3 = [-q_1^2 \dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - q_2^2 \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)]/(q_1^3 + q_2^3 + q_1 q_2 q_3) \quad (6.11.16)$$

这就是待求的运动微分方程。

方程式(6.11.16) 是系统动力学方程的显形式,其左端为广义加速度,右端为 $\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,但还不能给出广义力和广义约束反力的表达式。

如果已知系统的动能

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

则可按式(6.11.9) ~ 式(6.11.11) 对方程进行修改。这个问题实际上是要确定广义力 Q_1、Q_2、Q_3 以及约束乘子 λ。方程式(6.11.2) 给出为

$$\ddot{q}_1 = Q_1 - \lambda q_1, \ddot{q}_2 = Q_2 - \lambda q_2, \ddot{q}_3 = Q_3 + \lambda q_3 \quad (6.11.17)$$

将式(6.11.16) 代入式(6.11.17),得到

$$Q_1 - \lambda q_1 = [-(q_2^2 + q_1 q_3)\dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + q_1 q_2 \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)]/(q_1^3 + q_2^3 + q_1 q_2 q_3)$$

$$Q_2 - \lambda q_2 = [q_1 q_2 \dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (q_1^2 + q_2 q_3)\dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)]/(q_1^3 + q_2^3 + q_1 q_2 q_3)$$

$$Q_3 + \lambda q_3 = [-q_1^2 \dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - q_2^2 \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)]/(q_1^3 + q_2^3 + q_1 q_2 q_3) \tag{6.11.18}$$

方程式(6.11.18)就是为确定Q_1、Q_2、Q_3及λ的代数方程。为由方程式(6.11.18)最终确定这四个参数,尚需补充一个条件。

例2　一质量为m的质点在空间中运动,它的运动受有一个双面理想二阶线性非完整约束

$$\ddot{q}_3 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}(\dot{q}_1 \ddot{q}_1 + \dot{q}_2 \ddot{q}_2) = 0 \tag{6.11.19}$$

已知系统有两个第一积分

$$\omega_2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = h \neq 0 \tag{6.11.20}$$

$$\omega_3 = \dot{q}_2/\dot{q}_1 = C \neq 0 \tag{6.11.21}$$

而动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_3^2) \tag{6.11.22}$$

试研究系统运动方程的修改问题。

方程式(6.11.2)给出

$$m\ddot{q}_1 = Q_1 - \lambda \dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}$$

$$m\ddot{q}_2 = Q_2 - \lambda \dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} \tag{6.11.23}$$

$$m\ddot{q}_3 = Q_3 + \lambda$$

将式(6.11.20)和式(6.11.21)对t求导数,并注意到$h \neq 0, C \neq$

0，于是 Еругин 函数取为零，有

$$m(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 + \dot{q}_3\ddot{q}_3) + mg\dot{q}_3 = 0$$

$$\ddot{q}_2\dot{q}_1 - \ddot{q}_1\dot{q}_2 = 0 \tag{6.11.24}$$

由式(6.11.19)和式(6.11.24)，解得

$$\ddot{q}_1 = -g\dot{q}_1\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}]^{-1}$$

$$\ddot{q}_2 = -g\dot{q}_2\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}]^{-1}$$

$$\ddot{q}_3 = -g\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}]^{-1} \tag{6.11.25}$$

将式(6.11.25)代入式(6.11.23)，得到

$$Q_1 - \lambda\dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = -mg\dot{q}_1\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}]^{-1}$$

$$Q_2 - \lambda\dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2} = -mg\dot{q}_2\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}]^{-1}$$

$$Q_3 + \lambda = -mg\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}]^{-1} \tag{6.11.26}$$

由方程式(6.11.26)还不能唯一确定 Q_1、Q_2、Q_3 和 λ。为得到问题的唯一解答，尚需补充一个条件，例如，令

$$Q_1 = 0 \tag{6.11.27}$$

则由式(6.11.26)解得

$$Q_2 = 0$$

$$Q_3 = -2mg\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}]$$

$$\lambda = mg\dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}[1 + \dot{q}_3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}] \tag{6.11.28}$$

参 考 文 献

[1] Неймарк Ю И, Фуфаев Н А. Динамика Неголономных Систем. Москва: Наука, 1967.

[2] Добронравов В В. Основы Механики Неголономных Систем. Москва: Высшая Школа, 1970.

[3] 牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程. 力学学报, 1964, 7(2): 139 - 148.

[4] 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.

[5] 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京: 北京工业学院出版社, 1987.

[6] Papastavridis J G. A panoramic overview of the principles and equations of motion of advanced engineering dynamics. ASME Appl. Mech. Rev., 1998, 51(4): 239 -265.

[7] Mei Fengxiang. Nonholonomic mechanics. ASME Appl. Mech. Rev., 2000, 53(11): 283 - 305.

[8] Papastavridis J G. Analytical Mechanics. Oxford Univ. Press, 2002.

[9] Зегжда С А, Солтаханов ШХ, Юшков МП. Уравнения Движения Неголономных Систем и Вариационные Принципы Механики. Новый Класс Задач Управления. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[10] Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin: Springer-Verlag, 1949.

[11] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.

[12] 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987.

[13] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

[14] 赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京: 科学出版社, 1999.

[15] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京: 科学出版社, 1999.

[16] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.

[17] Mei Fengxiang. On the integration methods of nonholonomic dynamics. Int. J of Non-Linear Mech., 2000, 35(2): 229 - 238.

[18] 朱海平, 梅凤翔. 非完整系统稳定性的若干进展. 力学进展, 1998, 28(1): 17 - 29.

[19] 梅凤翔. 非完整动力学逆问题的基本解法. 力学学报, 1991, 23(2): 252 - 256.

[20] Новосёлов В С. Вариационные Методы в Механике. Ленинград: ЛГУ, 1966.

[21] 刘凤丽，梅凤翔．非完整动力学逆问题的一种提法和解法．应用数学和力学，1993，14(4)：309－314.

[22] Whittaker E T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Fourth Edition, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1937.

[23] Галиуллин А С. Методы Решения Обратых Задач Динамики. Москва: Наука, 1986.

[24] Shi Rongchang, Mei Fengxiang. On a generalization of Bertrand's theorem. Appl. Math. Mech., 1993, 14(6): 537－544.

[25] Erdi B. Generalization of Szebehely's equation for three dimensions. Celest Mech., 1982, 28: 209－218.

[26] Melis A, Piras B. An extension of Szebehely's problem to holonomic systems. Celest Mech., 1984, 32: 87－92.

[27] 朱海平，梅凤翔．Szebehely 问题对非完整系统的一个推广．非线性动力学学报，1995，2(1)：76－82.

[28] Ge Zhengming. Advanced Dynamics for Variable Mass Systems. Taipeh: Gaulih Book Company, 1998.

[29] 梅凤翔．非完整动力学逆问题的某些提法和解法．北京理工大学学报，1991，11(2)：18－25.

[30] 梅凤翔．二阶线性非完整系统动力学逆问题．黄淮学刊，1990，6(4)：1－5.

第7章 Birkhoff系统动力学逆问题

用Birkhoff方程描述运动的力学系统或描述状态的物理系统,称为Birkhoff系统。本章研究Birkhoff系统动力学逆问题,包括Pfaff-Birkhoff原理与Birkhoff方程、根据运动性质来建立Birkhoff方程、Birkhoff系统的对称性与动力学逆问题、根据普遍原理来组建方程,以及广义Poisson方法与动力学逆问题等。

7.1 Pfaff-Birkhoff原理与Birkhoff方程

本节讨论 Pfaff - Birkhoff 原理,以及由此导出的 Birkhoff 方程。

7.1.1 历史与起源

美国著名数学家Birkhoff GD于1927年出版专著*Dynamical Systems*(动力系统)[1],书中有如下一段文字:

"Suppose now that we take an extend Pfaffian variation problem

$$\delta\int_{t_o}^{t_1}\left[\sum_{j=1}^{2m}X_j(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})x'_j+Z(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})\right]\mathrm{d}t=0 \tag{12}$$

which leads at once to the system of ordinary equations of order 2 m

$$\sum_{j=1}^{2m}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial Z}{\partial x_i}=0\qquad(i=1,2,\cdots,2m) \tag{13}$$

We propose to consider these equations in the case when there is an equilibrium point at the origin, under the assumption that the $2m$ analytic functions X_i are such that the skew - symmetric determinant

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right|$$

is not 0 at the origin. The constant terms in the series for the functions X_i may obviously be omitted throughout.

It is clear that the Hamiltonian equations appear as a special case of these Pfaffian equations (12).

As will be shown in the following chapter, this generalization of the Hamiltonian equations possesses the same property of automatically fulfilling all of the conditions for complete stability, once the obvious conditions for first order stability are satisfied. Hence from this point of view the Pfaff equations seem as significant for dynamics as the Hamiltonian equations, although more general in type. Moreover they possess the additional advantage of maintaining their Pfaffian form under an arbitrary transformation of the formal group."

美国物理学家 Santillli RM 于 1978 年提议将下述方程命名为 Birkhoff 方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \qquad (7.1.1)$$

而函数 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 命名为 Birkhoff 函数。显然,方程式(7.1.1)比 Birkhoff 书中原来的方程式(13)更为一般。

Santilli 在参考文献[2]中研究了 Birkhoff 方程、Birkhoff 方程的变换理论以及 Galilei 相对论的推广等问题,并指出 Birkhoff 力学可应用于强子物理、统计力学、工程、生物物理等。

7.1.2 Pfaff – Birkhoff 原理

积分

$$A=\int_{t_1}^{t_2}\{R_\nu(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu-B(t,\boldsymbol{a})\}\,\mathrm{d}t \qquad (7.1.2)$$

称为 Pfaff 作用量。这里相同指标表示求和,$\nu=1,2,\cdots,2n$。

等时变分原理

$$\delta A = 0 \tag{7.1.3}$$

带有交换关系

$$\mathrm{d}\delta a^{\nu} = \delta \mathrm{d} a^{\nu} \quad (\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{7.1.4}$$

及端点条件

$$\delta a^{\nu}\big|_{t=t_1} = \delta a^{\nu}\big|_{t=t_2} = 0 \tag{7.1.5}$$

称为 Pfaff – Birkhoff 原理。原理式(7.1.3)~式(7.1.5)是一个普遍的一阶积分变分原理。

当取

$$\begin{aligned} a^{\mu} &= \begin{cases} q_{\mu} & (\mu = 1,2,\cdots,n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1,n+2,\cdots,2n) \end{cases} \\ R_{\nu} &= \begin{cases} p_{\nu} & (\nu = 1,2,\cdots,n) \\ 0 & (\nu = n+1,n+2,\cdots,2n) \end{cases} \\ B &= H \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

时,Pfaff – Birkhoff 原理成为 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_s \dot{q}_s - H)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{7.1.7}$$

这里 $s = 1,2,\cdots,n$。因此,Hamilton 原理是 Pfaff – Birkhoff 原理的一个特殊情形。

7.1.3 Birkhoff 方程

由 Pfaff – Birkhoff 原理式(7.1.3)容易导出 Birkhoff 方程。实际上,展开原理式(7.1.3),得

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} \dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} \right) \delta a^{\mu} + R_{\nu} \delta \dot{a}^{\nu} \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{7.1.8}$$

利用交换关系式(7.1.4),有

$$R_{\nu} \delta \dot{a}^{\nu} = R_{\nu} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta a^{\mu}) = (R_{\nu} \delta \dot{a}^{\nu}) - \left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} \dot{a}^{\mu} + \frac{\partial R_{\nu}}{\partial t} \right) \delta a^{\nu} \tag{7.1.9}$$

将式(7.1.9)代入式(7.1.8),并注意到端点条件式(7.1.5),得到

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu \mathrm{d}t = 0$$

(7.1.10)

由积分区间$[t_1, t_2]$的任意性,得到

$$\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu = 0 \qquad (7.1.11)$$

这个微分变分原理称为Pfaff - Birkhoff - d' Alembert原理。由原理式(7.1.11) 中 δa^μ 的独立性,便得到 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n)$$

(7.1.12)

Pfaff - Birkhoff 原理式(7.1.3)和 Birkhoff 方程式(7.1.12)是 Birkhoff 系统动力学的基础。

7.1.4 Birkhoff 系统动力学的一些研究成果

参考文献[3]构造了 Birkhoff 系统动力学的基本原理框架,包括 Birkhoff 方程和 Pfaff - Birkhoff 原理、完整和非完整系统的 Birkhoff 动力学、Birkhoff 系统的积分理论、Birkhoff 系统动力学逆问题、Birkhoff 系统的运动稳定性、Birkhoff 系统的代数和几何描述等。参考文献[6,7]研究了 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性。参考文献[8,9]研究了 Birkhoff 系统的积分不变量。参考文献[10 - 12]研究了Birkhoff系统动力学的一些逆问题。参考文献[13,14]较全面地论述了 Birkhoff 系统的各类对称性和各类守恒量。参考文献[17]论述了 Birkhoff 系统的全局分析。参考文献[18]研究了 Birkhoff 系统的分析动力学,包括 Birkhoff 形式运动方程的组建、Pfaff 作用量的对称变换、Birkhoff 方程的对称性及其与共形对称性的联系、Birkhoff 系统的积分不变量等。

Birkhoff 系统动力学正问题主要是指,研究 Birkhoff 方程本身及其积分。

7.2 Birkhoff 方程的建立问题

本节讨论 Birkhoff 系统两类动力学逆问题，包括根据已知运动性质来组建 Birkhoff 方程，以及根据已知一部分运动方程和一些运动性质来封闭方程的问题。

7.2.1 运动方程的组建问题

Birkhoff 系统动力学逆问题的第一种基本提法是 Birkhoff 方程的组建问题。提法如下：给定系统的运动性质，即给定积分流形

$$\Omega: I^{\rho}(a^{\mu},t)=C^{\rho} \quad (\rho=1,2,\cdots,m\leqslant 2n) \tag{7.2.1}$$

其中某些常数 C^{ρ} 可以是零。假设函数 $I^{\rho}(a^{\mu},t)$ 在域 $G\{a^{\mu}\}$ 上对变量是有界的、连续的、可微的，它们是彼此相容且独立的。问题是要按给定的性质来组建系统的 Birkhoff 方程，使得按式(7.2.1)的运动是系统的一个可能运动。也就是说，使得式(7.2.1)是系统的第一积分($C^{\rho}\neq 0$)或特殊积分($C^{\rho}=0$)。

Birkhoff 方程的组建问题，归结为按性质式(7.2.1)来找到系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 $R_{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$。

为解上述逆问题，可分两个步骤：第一步是按给定运动性质式(7.2.1)求出所有的 $\dot{a}^{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$，而得到一阶微分方程组；第二步是将所得一阶微分方程组化成 Birkhoff 形式。

首先，将式(7.2.1)对时间 t 求导数，并引入 Еругин 函数 Φ_{ρ}，得到

$$\frac{\partial I^{\rho}}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu}+\frac{\partial I^{\rho}}{\partial t}=\Phi_{\rho}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{a},t) \quad (\rho=1,2,\cdots,m;\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{7.2.2}$$

当 C^{ρ} 为任意常数时，$\Phi_{\rho}=0$；当 $C^{\rho}=0$ 时，Φ_{ρ} 为满足条件

$$\Phi_{\rho}(0,\boldsymbol{a},t)=0 \quad (\rho=1,2,\cdots,m) \tag{7.2.3}$$

的任意函数。由式(7.2.2)可解出 m 个 $\dot{a}^{\rho}$，表示为

$$\dot{a}^{\rho} = \frac{\Delta_{l\rho}}{\Delta}\left(\Phi_l - \frac{\partial I^l}{\partial t}\right) - \frac{\Delta^{\rho k}}{\Delta}\dot{a}^k$$

$$(\rho, l = 1, 2, \cdots, m; k = m+1, m+2, \cdots, 2n) \quad (7.2.4)$$

其中

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial I^{\rho}}{\partial a^l}\right) \quad (\rho, l = 1, 2, \cdots, m) \qquad (7.2.5)$$

$\Delta_{l\rho}$ 为 Δ 元素 (l,ρ) 的代数余子式，$\Delta^{\rho k}$ 为 Δ 中第 ρ 列用式 (7.2.2) 中矩阵第 k 列替代所得行列式。

当 $m = 2n$ 时，式(7.2.4) 成为

$$\dot{a}^{\mu} = \frac{\Delta_{\nu\mu}}{\Delta}\left(\Phi_{\nu} - \frac{\partial I^{\nu}}{\partial t}\right) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (7.2.6)$$

当 $m < 2n$ 时，由式(7.2.4) 不能求出所有 $\dot{a}^{\mu}(\mu = 1,2,\cdots,2n)$。此时，为得到所有 $\dot{a}^{\mu}$，需补充一些条件。当 $m = 2n$ 时，可由式(7.2.5) 求得所有 $\dot{a}^{\mu}$。但是，由于 Еругин 函数 Φ_{ν} 的存在，$\dot{a}^{\mu}$ 仍不能表示为 $\boldsymbol{a}, t$ 的显函数。此时，为确定 Еругин 函数，需补充一些条件，如有关稳定性、优化等条件。这样，当 $m = 2n$，而积分式(7.2.1) 全部是第一积分时，才能最终找到所有 $\dot{a}^{\mu}(\mu = 1,2,\cdots,2n)$，从而组成一阶微分方程组，完成解逆问题的第一步。

其次，假设已找到全部的 $\dot{a}^{\mu}$，并记作

$$\dot{a}^{\mu} = \sigma^{\mu}(\boldsymbol{a}, t) \quad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (7.2.7)$$

现在要将方程式(7.2.7) Birkhoff 化。Birkhoff 方程的一般形式为式(7.1.12)，即

$$\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (7.2.8)$$

将式(7.2.7) 代入方程式(7.2.8)，得到

$$\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t} = \left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\sigma^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (7.2.9)$$

对给定的函数 B，不论 R_{μ} 是否显含 t，方程式(7.2.9)都是 Cauchy –

Ковалевская 型的偏微分方程。根据 Cauchy – Ковалевская 定理知，方程式(7.2.9)的解总是存在的。由方程式(7.2.9)寻求动力学函数 B,R_μ 已有一些方法，如 Santilli 第一方法、Santilli 第二方法、Hojman 方法[2]，以及参考文献[3]给出的方法。

例1　给定4阶 Birkhoff 系统的运动性质

$$
\begin{aligned}
I^1 &= a^1 - ta^3 + \frac{1}{b}\int \arctan bt\mathrm{d}t = C^1 \\
I^2 &= a^1 - ta^4 + \frac{1}{2b}\int \ln(1+b^2t^2)\mathrm{d}t = C^2 \\
I^3 &= a^3 = C^3 \\
I^4 &= a^4 = C^4
\end{aligned}
\tag{7.2.10}
$$

式中：b 为常数；$C^1,C^2,\cdots,C^4$ 为任意常数。试建立系统的 Birkhoff 方程。

将式(7.2.10)对 t 求导数，当 $C^1,C^2,\cdots,C^4$ 为任意常数时，式(7.2.6)中的 Еругин 函数为零，故有

$$
\begin{aligned}
\dot{a}^1 &= a^3 - \frac{1}{b}\arctan bt, \dot{a}^2 = a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) \\
\dot{a}^3 &= 0, \dot{a}^4 = 0
\end{aligned}
\tag{7.2.11}
$$

当 $C^1,C^2,\cdots,C^4$ 为零，或为某些固定常数时，式(7.2.6)中的 Еругин 函数不恒为零。此时，式(7.2.6)给出

$$
\begin{aligned}
\dot{a}^1 &= a^3 - \frac{1}{b}\arctan bt + \Phi_1 + t\Phi_3, \\
\dot{a}^2 &= a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) + \Phi_2 + t\Phi_4 \\
\dot{a}^3 &= \Phi_3, \dot{a}^4 = \Phi_4
\end{aligned}
\tag{7.2.12}
$$

现取 Birkhoff 函数为

$$
B = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{b}\arctan bt\right)^2 + \frac{1}{2}\left[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2
\tag{7.2.13}
$$

并假设 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,3,4)$ 不显含 t，此时方程式(7.2.9)给出

$$\Omega_{12}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\Phi_2+t\Phi_4\right]+\Omega_{13}\phi_3+\Omega_{14}\phi_4=0$$

$$\Omega_{21}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt+\Phi_1+t\Phi_3\right)+\Omega_{23}\phi_3+\Omega_{24}\phi_4=0$$

$$\Omega_{31}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt+\Phi_1+t\Phi_3\right)+$$

$$\Omega_{32}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\Phi_2+t\Phi_4\right]+$$

$$\Omega_{34}\Phi_4=a^3-\frac{1}{b}\arctan bt \tag{7.2.14}$$

$$\Omega_{41}\left(a^3-\frac{1}{b}\arctan bt+\Phi_1+t\Phi_3\right)+$$

$$\Omega_{42}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)+\Phi_2+t\Phi_4\right]+$$

$$\Omega_{43}\Phi_4=a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

取 Birkhoff 张量为

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \tag{7.2.15}$$

则方程式(7.2.14)给出

$$\Phi_3=0,\Phi_4=0,\Phi_1+t\Phi_3=0,\Phi_2+t\Phi_4=0$$

即

$$\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=\Phi_4=0 \tag{7.2.16}$$

因此，所取 Birkhoff 函数式(7.2.13)和 Birkhoff 张量式(7.2.15)是可行的。此时，按式(7.2.15)可选 Birkhoff 函数组为

$$R_1=a^3,R_2=a^4,R_3=R_4=0 \tag{7.2.17}$$

这样，不论积分常数 $C^\rho(\rho=1,2,3,4)$ 是否为零，所选取的 Birkhoff 函数式(7.2.13)和 Birkhoff 函数式(7.2.17)都是问题的解。

进而,若取

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.18}$$

则由方程式(7.2.14)得到

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -t\left[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2)\right] - \left(a^3 - \frac{1}{b}\arctan bt\right) \\ \Phi_2 &= t\left(a^3 - \frac{1}{b}\arctan bt\right) - \left[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2)\right] \\ \Phi_3 &= a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2) \\ \Phi_4 &= -\left(a^3 - \frac{1}{b}\arctan bt\right) \end{aligned} \tag{7.2.19}$$

显然,不论式(7.2.10)中的常数是否为零,式(7.2.19)都不能成为问题的 Еругин 函数。因此,式(7.2.13)和式(7.2.18)是不正确的。

例2 已知2阶 Birkhoff 系统有一个第一积分

$$I^1 = a^2\cos t - a^1\sin t = C^1 \tag{7.2.20}$$

试求问题的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_1 和 R_2。

将式(7.2.20)对 t 求导数,因 C^1 为任意常数,故 Еругин 函数 $\Phi_1 = 0$,得到

$$\dot{a}^2\cos t - \dot{a}^1\sin t - a^2\sin t - a^1\cos t = 0 \tag{7.2.21}$$

这只给出 $\dot{a}^1$ 和 $\dot{a}^2$ 之间的关系,为找到 $\dot{a}^1$ 和 $\dot{a}^2$ 尚需补充一个条件。

假设问题的零解 $a^1 = a^2 = 0$ 是稳定的。取 Birkhoff 函数为 Ляпунов 函数,有

$$V = B = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{7.2.22}$$

稳定条件归结为

$$\dot{V} = \dot{B} = 0 \tag{7.2.23}$$

于是，有

$$a^1\dot{a}^1+a^2\dot{a}^2=0 \tag{7.2.24}$$

由式(7.2.21)和式(7.2.24)，得到

$$\dot{a}^1=a^2,\dot{a}^2=-a^1 \tag{7.2.25}$$

将其表示为 Birkhoff 形式，有

$$-\dot{a}^2-a^1=0,\dot{a}^1-a^2=0 \tag{7.2.26}$$

而

$$R_1=a^2,R_2=0 \tag{7.2.27}$$

7.2.2 运动方程的封闭问题

Birkhoff 系统动力学逆问题的第二种基本提法是 Birkhoff 方程的封闭问题，提法如下：给定系统的部分运动方程

$$\dot{a}^r=\sigma^r(\boldsymbol{a},t)\quad(r=1,2,\cdots,m'\leqslant 2n) \tag{7.2.28}$$

以及运动性质

$$I^s(\boldsymbol{a},t)=C^s\quad(s=m'+1,m'+2,\cdots,m\leqslant 2n) \tag{7.2.29}$$

来找到全部运动方程，并将其 Birkhoff 化。

Birkhoff 方程封闭问题的解法可分为两步：第一步是由式(7.2.28)和式(7.2.29)求出所有的 $\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$。第二步是将所得一阶微分方程化成 Birkhoff 形式。

首先，将式(7.2.29)对 t 求导数，并利用式(7.2.28)，引进 Еругин 函数后得到

$$\frac{\partial I^s}{\partial a^r}\sigma^r+\frac{\partial I^s}{\partial a^\rho}\dot{a}^\rho+\frac{\partial I^s}{\partial t}=\Phi_s(\boldsymbol{I},\boldsymbol{a},t)$$

$$(r=1,2,\cdots,m';s=m'+1,m'+2,\cdots,m) \tag{7.2.30}$$

由式(7.2.30)解出$(m-m')$个 $\dot{a}^s$，有

$$\dot{a}^s=\frac{\Delta_{ls}}{\Delta}\left(\Phi_l-\frac{\partial I^l}{\partial t}-\frac{\partial I^l}{\partial a^r}\sigma^r\right)-\frac{\Delta^{sk}}{\Delta}\dot{a}^k$$

$$(s,l=m'+1,m'+2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,2n) \tag{7.2.31}$$

其中

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial I^s}{\partial a^l}\right)$$

Δ_{ls}为Δ元素(l,s)的代数余子式，而Δ^{sk}为Δ中第s列用式(7.2.30)中矩阵第k列替代所得行列式。一般说来，方程式(7.2.31)没有唯一解。仅当$m=2n$且所有C^s全部是任意常数情形，才能由式(7.2.31)找到所有其余的$\dot{a}^\rho(\rho=m'+1,m'+2,\cdots,2n)$，则该方程可封闭。当然，也可以附加其他限制，如稳定性、优化等要求使得可以找到其余的$\dot{a}^\rho$。

其次，假设已找到所有其余的$\dot{a}^\rho$，记作

$$\dot{a}^\rho = \sigma^\rho(\boldsymbol{a},t) \quad (\rho=m'+1,m'+2,\cdots,2n) \tag{7.2.32}$$

联合式(7.2.28)、式(7.2.32)，便得

$$\dot{a}^\mu = \sigma^\mu(\boldsymbol{a},t) \quad (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{7.2.33}$$

下面的问题是要将已得到的一阶方程组(7.2.33) Birkhoff化。假设方程组(7.2.33)有Birkhoff表示，则有

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{7.2.34}$$

在给定函数B下，方程式(7.2.34)是Cauchy－Ковалевская型的偏微分方程。根据Cauchy－Ковалевская定理，方程的解总是存在的。但是，如何找到动力学函数B和$R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$，确是不容易的。

例3　对某4阶Birkhoff系统，给定3个方程

$$\dot{a}^1 = a^3, \dot{a}^2 = a^4, \dot{a}^3 = -a^1 - 2a^1a^3 \tag{7.2.35}$$

以及一个积分

$$I = \frac{1}{2}\left[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2 + 2a^2(a^1)^2 - \frac{2}{3}(a^2)^3\right] = C \tag{7.2.36}$$

式中：C为任意常数。试将系统运动方程封闭并将其Birkhoff化。

首先，求出所有$\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,4)$。将式(7.2.36)对时间$t$求导数，因$C$为任意常数，故Ерутин函数$\Phi=0$，得到

$$a^1\dot{a}^1 + a^2\dot{a}^2 + a^3\dot{a}^3 + a^4\dot{a}^4 + \dot{a}^2(a^1)^2 + 2a^1a^2\dot{a}^1 - (a^2)^2\dot{a}^2 = 0 \tag{7.2.37}$$

将式(7.2.35)代入式(7.2.37),得到

$$\dot{a}^4 = -a^2 - (a^1)^2 + (a^2)^2 \tag{7.2.38}$$

其次,将式(7.2.35)、式(7.2.38)化成Birkhoff系统。取系统的Birkhoff函数为

$$B = \frac{1}{2}\left[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2 + 2a^2(a^1)^2 - \frac{2}{3}(a^2)^3 \right] \tag{7.2.39}$$

并假设

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,4) \tag{7.2.40}$$

则式(7.2.34)给出

$$\begin{aligned}
&\Omega_{12}a^4 + \Omega_{13}(-a^1 - 2a^1a^2) + \Omega_{14}[-a^2 - (a^1)^2 + (a^2)^2] - \\
&(a^1 + 2a^1a^2) = 0 \\
&\Omega_{21}a^3 + \Omega_{23}(-a^1 - 2a^1a^2) + \Omega_{24}[-a^2 - (a^1)^2 + (a^2)^2] - \\
&[a^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2] = 0 \\
&\Omega_{31}a^3 + \Omega_{32}a^4 + \Omega_{34}[-a^2 - (a^1)^2 + (a^2)^2] - a^3 = 0 \\
&\Omega_{41}a^3 + \Omega_{42}a^4 + \Omega_{43}(-a^1 - 2a^1a^2) - a^4 = 0
\end{aligned} \tag{7.2.41}$$

它有解

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.42}$$

由此可取Birkhoff函数组为

$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \tag{7.2.43}$$

最后,Birkhoff方程表示为

$$\begin{aligned}
&-\dot{a}^3 - (a^1 + 2a^1a^2) = 0, -\dot{a}^4 - [a^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2] = 0 \\
&\dot{a}^1 - a^3 = 0, \dot{a}^2 - a^4 = 0
\end{aligned} \tag{7.2.44}$$

这就是著名的 Hénon – Heiles 问题的方程。

Hénon – Heiles 这个例子对定量计算方法提出新难题,因为它线性化后的模型具有相同的固有频率。这个例子也表明,不可积 Hamilton 系统一般导致混沌解,一般都有内在随机性[19]。

例 4　已知阶 Birkhoff 系统的一个方程

$$\dot{a}^2 = -t^2(a^1)^5 \tag{7.2.45}$$

和一个第一积分

$$I = \frac{1}{t}(a^2)^2 + a^1 a^2 + \frac{1}{3}t^3(a^1)^6 = C \quad (t > 0) \tag{7.2.46}$$

式中:C 为任意常数。试将系统方程封闭并将其 Birkhoff 化。

将式(7.2.46)对 t 求导数,因 C 为任意常数,故 Еругин 函数 $\Phi = 0$,得到

$$\frac{1}{t^2}(a^2)^2 + \frac{2}{t}a^2\dot{a}^2 + \dot{a}^1 a^2 + a^1\dot{a}^2 + t^2(a^1)^6 + 2t^3(a^1)^5\dot{a}^1 = 0 \tag{7.2.47}$$

将式(7.2.45)代入式(7.2.47),得到

$$\dot{a}^1 = \frac{a^2}{t^2} \tag{7.2.48}$$

Birkhoff 方程给出

$$\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2} + \frac{\partial R_2}{\partial t}\right) = \frac{a^2}{t^2}, \Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1} + \frac{\partial R_1}{\partial t}\right) = -t^2(a^1)^5 \tag{7.2.49}$$

今取

$$R_1 = a^2, R_2 = 0 \tag{7.2.50}$$

则有

$$\Omega_{12} = -\Omega_{21} = -1, \Omega^{12} = -\Omega^{21} = 1 \tag{7.2.51}$$

而方程式(7.2.49)成为

$$\frac{\partial B}{\partial a^2} = \frac{a^2}{t^2}, \frac{\partial B}{\partial a^1} = t^2(a^1)^5 \tag{7.2.52}$$

它有解

$$B=\frac{1}{2t^2}(a^2)^2+\frac{1}{6}t^2(a^1)^6 \tag{7.2.53}$$

7.3 Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题

本节研究 Birkhoff 系统的 Noether 对称性以及与 Noether 对称性相关的两类动力学逆问题。

7.3.1 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

取时间 t 和变量 a^μ 的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t, a^{\mu *}=a^\mu+\Delta a^\mu \tag{7.3.1}$$

或其展开式为

$$t^*=t+\varepsilon_\alpha\xi_0^\alpha(t,\boldsymbol{a}), a^{\mu *}=a^\mu+\varepsilon_\alpha\xi_\mu^\alpha(t,\boldsymbol{a}) \quad (\alpha=1,2,\cdots,r;\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{7.3.2}$$

式中：ε_α 为无限小参数；ξ_0^α、ξ_μ^α 为无限小生成元。

Pfaff 作用量为式(7.1.2)，即

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(R_\mu \mathrm{d}a^\mu-B\mathrm{d}t) \tag{7.3.3}$$

它的全变分为[3,6,15]

$$\Delta A=\int_{t_1}^{t_2}\left[(R_\mu\dot{a}^\mu-B)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\Delta t+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\Delta a^\mu+R_\mu\Delta\dot{a}^\mu\right]\mathrm{d}t \tag{7.3.4}$$

或写成

$$\Delta A=\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha)+\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\bar{\xi}_\mu^\alpha\right\}\mathrm{d}t \tag{7.3.5}$$

其中

$$\bar{\xi}_\mu^\alpha=\xi_\mu^\alpha-\dot{a}^\mu\xi_0^\alpha \tag{7.3.6}$$

如果

$$\Delta A = 0 \tag{7.3.7}$$

则称变换式(7.3.1)为 Noether 意义下的对称变换。

如果

$$\Delta A = -\int_{t_1}^{t_2} \Delta G_N \mathrm{d}t \tag{7.3.8}$$

式中:$\Delta G_N = \varepsilon_\alpha G_N{}^\alpha$,则称变换式(7.3.1)为 Noether 意义下的准对称变换。

准对称变换的判据在取 $\alpha = 1$ 时归结为如下广义 Noether 等式,即

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu + R_\mu \dot{\xi}_\mu - B\dot{\xi}_0 + \dot{G}_N = 0 \tag{7.3.9}$$

展开式(7.3.9),得到广义 Killing 方程[15]

$$R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} = -\frac{\partial G_N}{\partial a^\nu} \quad (\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{7.3.10}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} = \frac{\partial G_N}{\partial t} \quad (\mu = 1,2,\cdots,2n) \tag{7.3.11}$$

Birkhoff 系统的 Noether 定理有如下结果。

命题 1[16] 如果无限小生成元 ξ_0、ξ_μ 和规范函数 G_N 满足广义 Noether 等式(7.3.9),则 Birkhoff 系统存在 Noether 守恒量

$$I_N = R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G_N = 常数 \tag{7.3.12}$$

命题 2[16] 如果无限小生成元 ξ_0、ξ_μ 和规范函数 G_N 满足广义 Killing 方程式(7.3.10)、式(7.3.11),则 Birkhoff 系统存在 Noether 守恒量式(7.3.12)。

Birkhoff 系统动力学正问题是指,给定系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu = 1,2,\cdots,2n)$,来寻求系统的运动性质,特别是寻求准对称变换,进而求得积分。

7.3.2 逆问题的第一种提法和解法

与 Birkhoff 系统 Noether 对称性相关的动力学逆问题的第一种提法如下：已知系统的 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$，按给定的一个积分

$$I(a^\mu,t)=C \tag{7.3.13}$$

以及广义 Killing 方程式(7.3.10)、式(7.3.11)来寻求系统的 Birkhoff 函数 B 和准对称变换的生成元 ξ_0、ξ_μ 以及规范函数 G_N。

为解上述逆问题，可令积分式(7.3.13)等于 Noether 对称性的守恒量式(7.3.12)，即令

$$R_\mu\xi_\mu-B\xi_0+G_N=I \tag{7.3.14}$$

将式(7.3.14)对 a^ν 和 t 求偏导数，分别得到

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\xi_\mu+R_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\xi_0-B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu}+\frac{\partial G_N}{\partial a^\nu}=\frac{\partial I}{\partial a^\nu} \tag{7.3.15}$$

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\xi_\mu+R_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0-B\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial G_N}{\partial t}=\frac{\partial I}{\partial t} \tag{7.3.16}$$

将式(7.3.15)与式(7.3.10)、式(7.3.16)与式(7.3.11)分别相减，得到

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\xi_\mu+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right)\xi_0=-\frac{\partial I}{\partial a^\nu} \tag{7.3.17}$$

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu=\frac{\partial I}{\partial t} \tag{7.3.18}$$

由式(7.3.17)解得

$$\xi_\mu=\Omega^{\mu\nu}\left[\frac{\partial I}{\partial a^\nu}+\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\xi_0\right] \tag{7.3.19}$$

再将式(7.3.19)代入式(7.3.18)，得

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^\nu}=\frac{\partial I}{\partial t}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^\nu} \tag{7.3.20}$$

方程式(7.3.20)的右端是已知的，它是关于 B 的偏微分方程。解此方程，便可求出 B 来。然后，由式(7.3.19)给出生成元 ξ_μ、ξ_0 之

间的关系。最后，由式(7.3.14)求出规范函数 G_N。

例1　已知2阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组为

$$R_1 = a^2, R_2 = 0 \tag{7.3.21}$$

以及积分

$$I = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{7.3.22}$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B，准对称变换的生成元 ξ_1、ξ_2、ξ_0 和规范函数 G_N。

由式(7.3.21)可知

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵为

$$(\boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式(7.3.20)给出

$$\frac{\partial B}{\partial a^1} a^2 - \frac{\partial B}{\partial a^2} a^1 = 0 \tag{7.3.23}$$

它有解

$$B = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{7.3.24}$$

将式(7.3.24)代入式(7.3.19)，得

$$\xi_1 = a^2 + a^2 \xi_0, \xi_2 = -a^1 - a^1 \xi_0 \tag{7.3.25}$$

由此还不能唯一确定生成元 ξ_1、ξ_2 和 ξ_0。可取生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = a^2, \xi_2 = -a^1 \tag{7.3.26}$$

最后，将式(7.3.21)、式(7.3.22)、式(7.3.24)、式(7.3.26)代入式(7.3.14)，得

$$G_N = I - R_1\xi_1 - R_2\xi_2 + B\xi_0 = \frac{1}{2}(a^1)^2 - \frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{7.3.27}$$

例2　已知4阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组为

$$R_1 = 0, R_2 = a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t + (a^2 \sin t + a^4 \cos t)\cos t$$

$$R_3 = a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t, R_4 = -(a^2\sin t + a^4\cos t)\sin t \tag{7.3.28}$$

并知道一个积分

$$I = a^2\cos t - a^4\sin t \tag{7.3.29}$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B，相应的准对称变换生成元 $\xi_1, \cdots, \xi_4$，ξ_0 和规范函数 G_N。

由式(7.3.28)可知

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3.30}$$

故有

$$(\boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3.31}$$

方程式(7.3.20)给出

$$-\frac{\partial B}{\partial a^1}\cos t - \frac{\partial B}{\partial a^2}\sin t + \frac{\partial B}{\partial a^3}\sin t - \frac{\partial B}{\partial a^4}\cos t = -2(a^2\sin t + a^4\cos t) \tag{7.3.32}$$

方程式(7.3.32)有解

$$B = (a^2\sin t + a^4\cos t)^2 \tag{7.3.33}$$

方程式(7.3.19)给出

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\cos t + a^3\xi_0, \xi_2 = -\sin t + a^4\xi_0 \\ \xi_3 &= \sin t - a^4\xi_0, \xi_2 = -\cos t - a^2\xi_0 \end{aligned} \tag{7.3.34}$$

取

$$\xi_0 = 0 \tag{7.3.35}$$

则有

$$\xi_1 = -\cos t, \xi_2 = -\sin t, \xi_3 = \sin t, \xi_2 = -\cos t \tag{7.3.36}$$

7.3.3 逆问题的第二种提法和解法

与 Birkhoff 系统 Noether 对称性相关的动力学逆问题的第二种提法如下：已知系统的 Birkhoff 函数 B，按给定的积分

$$I(a^{\mu},t)=C \tag{7.3.37}$$

以及广义 Killing 方程式(7.3.10)、式(7.3.11)来求系统的 Birkhoff 函数组 $R_{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 和准对称变换的生成元 ξ_0、ξ_{μ} 以及规范函数 G_N。

为解上述逆问题，可利用关系式(7.3.17)和式(7.3.18)，或关系式(7.3.19)和式(7.3.20)。在已知函数 B 和积分 I 时，这些关系给出 R_{μ}、ξ_{μ} 和 ξ_0 之间的方程。在找到 R_{μ}、ξ_{μ} 和 ξ_0 之后，再由关系(7.3.14)求出规范函数 G_N。

例 3 已知 2 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数

$$B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{7.3.38}$$

以及积分

$$I=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{7.3.39}$$

试求系统的 Birkhoff 函数组 R_1、R_2，准对称变换的生成元 ξ_1、ξ_2、ξ_0 以及规范函数 G_N。

关系式(7.3.17)和式(7.3.18)给出

$$\begin{aligned}
&\Omega_{21}\xi_2+\left(\frac{\partial R_1}{\partial t}+a^1\right)\xi_0=-a^1\\
&\Omega_{12}\xi_1+\left(\frac{\partial R_2}{\partial t}+a^2\right)\xi_0=-a^2\\
&\left(\frac{\partial R_1}{\partial t}+a^1\right)\xi_1+\left(\frac{\partial R_2}{\partial t}+a^2\right)\xi_2=0
\end{aligned} \tag{7.3.40}$$

由此注意到

$$\Omega_{12}=-\Omega_{21}$$

得

$$\frac{\partial R_1}{\partial t}a^2 - \frac{\partial R_2}{\partial t}a^1 = 0$$

它有解

$$R_1 = a^2, R_2 = 0 \tag{7.3.41}$$

将式(7.3.41)代入式(7.3.40),得

$$-\xi_2 + a^1\xi_0 = -a^1, \xi_1 + a^2\xi_0 = -a^2, a^1\xi_1 + a^2\xi_2 = 0$$

由此解得

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = \xi_2 = 0 \tag{7.3.42}$$

最后,将式(7.3.38)、式(7.3.39)、式(7.3.41)和式(7.3.42)代入式(7.3.14),得

$$G_N = 0 \tag{7.3.43}$$

例4 已知2阶Birkhoff系统的Birkhoff函数

$$B = \frac{1}{2t^2}(a^2)^2 + \frac{1}{6}t^2(a^1)^6 \tag{7.3.44}$$

和积分

$$I = \frac{1}{t}(a^2)^2 + a^1a^2 + \frac{1}{3}t^3(a^1)^6 \tag{7.3.45}$$

试求系统的Birkhoff函数组R_1、R_2,准对称变换的生成元ξ_1、ξ_2、ξ_0和规范函数G_N。

式(7.3.17)和式(7.3.18)给出

$$\Omega_{21}\xi_2 + \left[\frac{\partial R_1}{\partial t} + t^2(a^1)^5\right]\xi_0 = -a^2 - 2t^3(a^1)^5$$

$$\Omega_{12}\xi_1 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{1}{t^2}a^2\right)\xi_0 = -\frac{2}{t}a^2 - a^1$$

$$\left[\frac{\partial R_1}{\partial t} + t^2(a^1)^5\right]\xi_1 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{1}{t^2}a^2\right)\xi_2 = -\frac{1}{t^2}(a^2)^2 + t^2(a^1)^6 \tag{7.3.46}$$

可找到如下解

$$R_1 = a^2, R_2 = 0, \xi_0 = -2t, \xi_1 = a^1, \xi_2 = -a^2 \tag{7.3.47}$$

将式(7.3.44)、式(7.3.45)、式(7.3.47)代入式(7.3.14),得

$$G_N = 0 \tag{7.3.48}$$

而准对称变换成为对称变换。

7.4 根据 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理组建运动方程

本节研究由微分变分原理来组建 Birkhoff 方程的问题，包括 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理以及由此原理提出的一类动力学逆问题的解法。

7.4.1 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理

与 Birkhoff 系统相关的微分变分原理是 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理，有形式(7.1.11)，即

$$\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right\}\delta a^\mu = 0 \quad (\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{7.4.1}$$

如果原理式(7.4.1)中的变分 δa^μ 是彼此独立的，则可导出 Birkhoff 方程式(7.1.12)。如果原理式(7.4.1)中的变分 δa^μ 不是彼此独立的，便得不到方程式(7.1.12)。此时，需给出对 δa^μ 的限制，而得到相应的运动方程。

与微分变分原理式(7.4.1)相关的动力学正问题是指，由这个原理出发研究系统的运动性质。例如，参考文献[15]研究了 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理在群的无限小变换下的不变性条件，并导出了守恒量，即求得了积分。

7.4.2 逆问题的提法和解法

与原理式(7.4.1)相关的动力学逆问题的提法如下：以原理式(7.4.1)为出发点来组建系统的运动方程，要求按给定性质

$$\Omega: I^\rho(a^\mu, t) = 0 \quad (\rho = 1,2,\cdots,m \leqslant 2n) \tag{7.4.2}$$

的运动是系统的一个可能运动。这里假设函数 $I^\rho(\rho = 1,2,\cdots,m)$

彼此相容、独立,对其变量连续、可微。

为解上述逆问题,将式(7.4.2)对 t 求导数,并引入 Еругин 函数,得到

$$\frac{\partial I^\rho}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu + \frac{\partial I^\rho}{\partial t} = \Phi_\rho(\boldsymbol{I},\boldsymbol{a},t) \quad (\rho = 1,2,\cdots,m \leqslant 2n) \tag{7.4.3}$$

对式(7.4.2)取等时变分,得

$$\frac{\partial I^\rho}{\partial a^\mu}\delta a^\mu = 0 \quad (\rho = 1,2,\cdots,m) \tag{7.4.4}$$

这是式(7.4.2)对变分 δa^μ 的限制条件。假设由式(7.4.4)可解出前面 m 个 δa^ρ,记作

$$\delta a^\rho = C_{\rho\sigma}(t,\boldsymbol{a})\delta a^\sigma \quad (\sigma = m+1, m+2,\cdots,2n) \tag{7.4.5}$$

将式(7.4.5)代入原理式(7.4.1),由 δa^σ 的独立性得到

$$\Omega_{\sigma\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\sigma} - \frac{\partial R_\sigma}{\partial t} + C_{\rho\sigma}\left(\Omega_{\rho\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\rho} - \frac{\partial R_\rho}{\partial t}\right) = 0$$

$$(\nu = 1,2,\cdots,2n;\sigma = m+1,m+2,\cdots,2n;\rho = 1,2,\cdots,m) \tag{7.4.6}$$

这样,式(7.4.3)和式(7.4.6)便是所论问题的运动方程。

所得到的方程允许系统按给定性质式(7.4.2)而运动,并且仅当初始条件 $t = t_0, a^\mu = a_0^\mu$ 满足式(7.4.2),即当满足

$$I^\rho(a_0^\mu, t_0) = 0 \quad (\rho = 1,2,\cdots,m \leqslant 2n) \tag{7.4.7}$$

时,这个运动才存在。自然可假设条件式(7.4.7)实际上不满足,因此,要求当系统有对条件式(7.4.7)的初始偏离时,相对给定性质式(7.4.2)是稳定的或渐近稳定的。这个要求可用来选取尚未确定的 Еругин 函数 Φ_ρ。

7.4.3 算例

4 阶 Birkhoff 系统的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理为

$$(-\dot{a}^3 - a^1)\delta a^1 + (-\dot{a}^4 - a^2)\delta a^2 + (\dot{a}^1 - a^3)\delta a^3 +$$

$$(\dot{a}^2-a^4)\delta a^4=0 \tag{7.4.8}$$

给定运动性质为

$$I^1=a^1+a^2=0, I^2=a^3+a^1a^4=0 \tag{7.4.9}$$

试组建运动方程,并按稳定性要求选取 Еругин 函数 Φ_1、Φ_2。

方程式(7.4.6)和式(7.4.3)给出

$$\begin{aligned}&-\dot{a}^3-a^1+\dot{a}^4+a^2-\dot{a}^1a^4+\dot{a}^3a^4=0\\&\dot{a}^2-a^4-a^1\dot{a}^1+a^1a^3=0\\&\dot{a}^1+\dot{a}^2=\Phi_1, \dot{a}^3+\dot{a}^1a^4+\dot{a}^4a^1=\Phi_2\end{aligned} \tag{7.4.10}$$

这就是所要组建的运动方程。由方程式(7.4.10)求出 $\dot{a}^\mu$,有

$$\begin{aligned}&(1+a^1)\dot{a}^1=\Phi_1+a^1a^3-a^4\\&(1+a^1)\dot{a}^2=a^1\Phi_1+a^4-a^1a^3\\&(1+a^1)\dot{a}^3=\Phi_2-a^4\Phi_1+a^4(a^4-a^1a^3)-a^1(a^1-a^2-a^3a^4)\\&(1+a^1)\dot{a}^4=\Phi_2+a^1-a^2-a^3a^4 \qquad (a'\neq-1)\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

为寻找 Еругин 函数 Φ_1 和 Φ_2,可提出补充需要:要求方程式(7.4.11)的零解 $a^\mu=0(\mu=1,2,\cdots,4)$ 是稳定的,并且要满足

$$\Phi_1|_{a^1+a^2=0}=0, \Phi_2|_{a^3+a^1a^4=0}=0 \tag{7.4.12}$$

选 Ляпунов 函数为

$$V=\frac{1}{2}[(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2] \tag{7.4.13}$$

按方程式(7.4.11)求对时间 t 的导数,得

$$\dot{V}=\frac{1}{1+a^1}[\Phi_1(a^1+a^1a^2-a^3a^4)+\Phi_2(a^3+a^4)] \tag{7.4.14}$$

选 Еругин 函数为

$$\begin{aligned}&\Phi_1=(1+a^1)(a^3+a^4)(a^1+a^2)(a^3+a^1a^4)\\&\Phi_2=-(1+a^1)(a^1+a^1a^2-a^3a^4)(a^3+a^1a^4)(a^1+a^2)\end{aligned} \tag{7.4.15}$$

则有

$$\dot{V}=0 \tag{7.4.16}$$

据 Ляпунов 定理可知,零解是稳定的,而且式(7.4.15)也满足式(7.4.12)。

7.5 广义 Poisson 方法与动力学逆问题

本节研究 Birkhoff 系统的广义 Poisson 方法与动力学逆问题,根据 Birkhoff 系统关于第一积分的广义 Poisson 条件提出并解决一类动力学逆问题。

7.5.1 Birkhoff 系统的 Poisson 理论

自治情形与半自治情形的 Birkhoff 方程有如下形式,即

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}=0 \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{7.5.1}$$

在自治情形 $\Omega_{\mu\nu}=\Omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a}),B=B(\boldsymbol{a})$;在半自治情形 $\Omega_{\mu\nu}=\Omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})$, $B=B(\boldsymbol{a},t)$。将某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程式(7.5.1)求对 t 的导数定义为一个积,即

$$\dot{A}=\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}\overset{\text{def}}{=}A\circ B \tag{7.5.2}$$

它满足 Lie 代数公理。此时,Poisson 理论有如下结果[15]。

命题 1 $I(a^{\mu},t)=$ 常数是系统式(7.5.1)第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t}+I\circ B=0 \tag{7.5.3}$$

命题 2 自治形式 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数 $B=B(\boldsymbol{a})$ 是系统的第一积分。

命题 3 如果自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程有不处于相互内旋的两个第一积分 $I_1(a^{\mu},t)=C_1,I_2(a^{\mu},t)=C_2$,则它们的广义 Poisson 括号 $[I_1,I_2]=I_1\circ I_2$ 也是系统的第一积分。

命题 4 如果自治形式的 Birkhoff 方程有包含时间的第一积

分 $I(a^\mu,t)=C$,那么 $\partial I/\partial t,\partial^2 I/\partial t^2,\cdots$都是系统的第一积分。

命题 5 如果自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程有包含变量 a^ρ 的第一积分,而 $\Omega^{\mu\nu}$和 B 都不显含 a^ρ,则 $\partial I/\partial a^\rho,\partial^2 I/\partial a^{\rho 2},\cdots$都是系统的积分。

非自治形式的 Birkhoff 方程有如下形式,即

$$\dot{a}^\mu-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)=0 \tag{7.5.4}$$

将其表示为

$$\dot{a}^\mu-S^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}=0\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{7.5.5}$$

其中

$$S^{\mu\nu}=\Omega^{\mu\nu}+T^{\mu\nu} \tag{7.5.6}$$

$$(T^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}T^{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & T^{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & T^{2n2n}\end{pmatrix} \tag{7.5.7}$$

而

$$T^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\stackrel{\text{def}}{=}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu} \tag{7.5.8}$$

将某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程式(7.5.5)求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}=\frac{\partial A}{\partial a^\mu}S^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\stackrel{\text{def}}{=}A\cdot B \tag{7.5.9}$$

这个积具有相容代数结构并具有 Lie 容许代数结构[2,15]。此时,Poisson 理论有如下结果[15]。

命题 6 $I(a^\mu,t)=$常数是非自治形式 Birkhoff 方程式(7.5.5)第一积分的充分必要条件为

$$\frac{\partial I}{\partial t}+I\cdot B=0 \tag{7.5.10}$$

命题 7 如果非自治形式的 Birkhoff 方程式(7.5.5)有包含变

量 a^ρ 的第一积分，而 $S^{\mu\nu}$ 和 B 都不显含 a^ρ，那么 $\partial I/\partial a^\rho$，$\partial^2 I/\partial a^{\rho 2}$，…都是系统的第一积分。

上述7个命题可用来研究 Birkhoff 系统动力学正问题：由微分方程求系统的积分。

称式(7.5.10)为 Birkhoff 系统的广义 Poisson 条件，可写成

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right) = 0 \qquad (7.5.11)$$

由广义 Poisson 条件式(7.5.11)可提出并解决 Birkhoff 系统的一类动力学逆问题。

7.5.2 逆问题的提法和解法

与广义 Poisson 条件相关的动力学逆问题有以下提法：根据已知第一积分

$$I(a^\mu, t) = C \qquad (7.5.12)$$

来求 Birkhoff 系统中的动力学函数 R_μ 和 B。

这类逆问题的解归结为求解 R_μ、B 所满足的广义 Poisson 条件所给出的偏微分方程式(7.5.11)。一般说来，因为给出的信息不足，这些逆问题没有唯一解。

7.5.3 算例

例1 已知2阶 Birkhoff 系统有一个第一积分

$$I = a^1 \sin t + a^2 \cos t = C \qquad (7.5.13)$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_1、R_2。

广义 Poisson 条件式(7.5.11)给出

$$a^1 \cos t - a^2 \sin t + \sin t\left(\Omega^{11}\frac{\partial B}{\partial a^1} + \Omega^{12}\frac{\partial B}{\partial a^2}\right) +$$

$$\cos t\left(\Omega^{21}\frac{\partial B}{\partial a^1} + \Omega^{22}\frac{\partial B}{\partial a^2}\right) = 0 \qquad (7.5.14)$$

由 $\Omega^{\mu\nu}$ 的反对称性可知

$$\Omega^{11} = \Omega^{22} = 0, \Omega^{21} = -\Omega^{12} \qquad (7.5.15)$$

将式(7.5.15)代入式(7.5.14)，得

$$\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}\sin t-\frac{\partial B}{\partial a^1}\cos t\right)+a^1\cos t-a^2\sin t=0 \tag{7.5.16}$$

这就是动力学函数 B、R_1 和 R_2 所满足的偏微分方程。

方程式(7.5.16)有解

$$\Omega^{12}=1, B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2\} \tag{7.5.17}$$

于是，可取 Birkhoff 函数组为

$$R_1=a^2, R_2=0 \tag{7.5.18}$$

例 2　已知 2 阶 Birkhoff 系统的一个积分

$$I=\frac{1}{t}(a^2)^2+a^1a^2+\frac{1}{3}t^3(a^1)^6=C \tag{7.5.19}$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_1、R_2。

广义 Poisson 条件式(7.5.11)给出

$$-\frac{1}{t^2}(a^2)^2+t^2(a^1)^6+[a^2+2t^3(a^1)^5]\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}+\frac{\partial R_2}{\partial t}\right)+$$

$$\left(a^1+\frac{2}{t}a^2\right)\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}+\frac{\partial R_1}{\partial t}\right)=0 \tag{7.5.20}$$

取

$$R_1=a^2, R_2=0 \tag{7.5.21}$$

则有

$$\Omega_{12}=-1, \Omega^{12}=-\Omega^{21}=1 \tag{7.5.22}$$

将式(7.5.21)、式(7.5.22)代入式(7.5.20)，得到

$$-\frac{1}{t^2}(a^2)^2+t^2(a^1)^6+[a^2+2t^3(a^1)^5]\frac{\partial B}{\partial a^2}-\left(a^1+\frac{2}{t}a^2\right)\frac{\partial B}{\partial a^1}=0 \tag{7.5.23}$$

由此可求得函数 B，即

$$B=\frac{1}{2t^2}(a^2)^2+\frac{1}{6}t^2(a^1)^6 \tag{7.5.24}$$

对高阶 Birkhoff 系统，由广义 Poisson 条件求得动力学函数 R_μ、B，则有较大困难。

参考文献

[1] Birkhoff G D. Dynamical Systems. Providence RI: AMS College Publ, 1927.

[2] Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ. New York: Springer - Verlag, 1983.

[3] 梅凤翔,等. Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.

[4] Mei Fengxiang, Lévesque B. Generalized canonical realization and Birkhoff's realization of Chaplygin's nonholonomic system. Transactions of the CSME, 1995, 19(2): 59 - 73.

[5] Guo Yongxin, Luo Shaokai, Shang Mei, Mei Fengxiang. Birkhoffian formulations of nonholonomic constrained systems. Reports on Math. Phys., 2001, 47(3): 313 - 322.

[6] Mei Fengxiang. The Noether's theory of Birkhoffian systems. Science in China, Series A, 1993, 36(12): 1456 - 1467.

[7] Mei Fengxiang. Lie symmetry and conservation law of Birkhoffian system. Chin. Sci. Bull., 1999, 44(4): 318 - 320.

[8] Mei Fengxiang, Wu Huibin. First integral and integral invariant of Birkhoffian system. Chin. Sci. Bull., 2000, 45(5): 412 - 414.

[9] 梅凤翔. Birkhoff 系统的积分不变量. 北京理工大学学报, 2000, 20(1): 25 - 28.

[10] 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学逆问题. 北京师范学院学报, 1992, 13(4): 32 - 36.

[11] 张永发,梅凤翔. Birkhoff 系统的对称与动力学逆问题. 江西科学, 1995, 13(3): 125 - 129.

[12] 张永发, 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学逆问题的两种提法和解法. 北京理工大学学报, 1996, 16(4): 352 - 356.

[13] 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学的研究进展. 力学进展, 1997, 27(4): 436 - 446.

[14] Mei Fengxiang. On the Birkhoffian mechanics. Int. J. of Non - Linear Mech., 2001, 36(5): 817 - 834.

[15] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京: 科学出版社, 1999.

[16] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.

[17] 陈向炜. Birkhoff 系统的全局分析. 开封: 河南大学出版社, 2002.

[18] Галиуллин А С, Гафаров Г Г, Малайшка Р П, Хван А М. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. Москва: РЖУФН, 1997.

[19] 朱照宣. 混沌. 北京大学力学系, 1984.

第 8 章　广义 Birkhoff 系统动力学逆问题

用广义 Birkhoff 方程描述运动的力学系统或描述状态的物理系统，称为广义 Birkhoff 系统。本章研究广义 Birkhoff 系统动力学逆问题，包括广义 Pfaff – Birkhoff 原理与广义 Birkhoff 方程、根据运动性质来建立广义 Birkhoff 方程、广义 Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题、根据普遍原理组建运动方程，以及广义 Poisson 方法与动力学逆问题等。

8.1　广义 Pfaff-Birkhoff 原理与广义 Birkhoff 方程

本节提出一类新型积分变分原理，称其为广义 Pfaff-Birkhoff 原理，并由这个原理出发来导出广义 Birkhoff 方程。

8.1.1　Hamilton 原理对完整非保守系统的推广

众所周知，完整保守系统的 Hamilton 原理有形式

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\,\mathrm{d}t = 0 \tag{8.1.1}$$

式中：$L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数；$\boldsymbol{q}$ 为系统的广义坐标；$\dot{\boldsymbol{q}}$ 为系统的广义速度；δ 为等时变分。Hamilton 原理式(8.1.1)对非保守系统的推广可表示为

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta L+\delta' W)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{8.1.2}$$

其中

$$\delta' W = Q_s\delta q_s \tag{8.1.3}$$

而 $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为对应广义坐标 q_s 的非势广义力。当

$$\delta' W = 0 \tag{8.1.4}$$

时，原理式(8.1.2)成为 Hamilton 原理式(8.1.1)。

8.1.2 Pfaff-Birkhoff 原理的推广

Pfaff 作用量有如下形式，即

$$A(\nu) = \int_{t_1}^{t_2} [R_\nu(t, \boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - B(t, \boldsymbol{a})]\mathrm{d}t \tag{8.1.5}$$

式中：$B = B(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数；$R_\nu = R_\nu(t, \boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数组。

Pfaff – Birkhoff 原理为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (R_\nu\dot{a}^\nu - B)\mathrm{d}t = 0 \tag{8.1.6}$$

当取

$$a^\mu = \begin{cases} q_\mu & (\mu = 1, 2, \cdots, n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1, n+2, \cdots, 2n) \end{cases},$$

$$R_\nu = \begin{cases} p_\nu & (\nu = 1, 2, \cdots, n) \\ 0 & (\nu = n+1, n+2, \cdots, 2n) \end{cases}, B = H \tag{8.1.7}$$

时，Pfaff – Birkhoff 原理式(8.1.6)成为 Hamilton 原理式(8.1.1)。

类似于 Hamilton 原理的推广形式式(8.1.2)，可将 Pfaff – Birkhoff 原理式(8.1.6)推广到如下形式，即

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R_\nu\dot{a}^\nu - B) + \delta' W]\mathrm{d}t = 0 \tag{8.1.8}$$

其中

$$\delta' W = \Lambda_\nu \delta a^\nu, \Lambda_\nu = \Lambda_\nu(t, \boldsymbol{a}) \tag{8.1.9}$$

称原理式(8.1.8)为广义 Pfaff – Birkhoff 原理。当 $\delta' W = 0$ 时，则它成为 Pfaff – Birkhoff 原理式(8.1.6)。

8.1.3 广义 Birkhoff 方程

由广义 Pfaff – Birkhoff 原理式(8.1.8)可以推导广义 Birkhoff 方程。将原理式(8.1.8)表示为

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu \delta a^\mu + R_\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta a^\mu) - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\delta a^\mu + \Lambda_\mu \delta a^\mu\right]\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu\right]\delta a^\mu \mathrm{d}t \tag{8.1.10}$$

考虑到积分区间$[t_1, t_2]$的任意性,由式(8.1.10)得到

$$\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu\right]\delta a^\mu = 0 \tag{8.1.11}$$

$(\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n)$

考虑到δa^μ 的独立性,由式(8.1.11)得到

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{8.1.12}$$

方程式(8.1.12)称为广义 Birkhoff 方程,于 1993 年由参考文献[1]给出。

当

$$\Lambda_\mu = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{8.1.13}$$

则方程式(8.1.12)成为 Birkhoff 方程[2-4]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \tag{8.1.14}$$

广义 Pfaff - Birkhoff 原理式(8.1.8)和广义 Birkhoff 方程式(8.1.12)是广义 Birkhoff 系统动力学的基础。

下面举例说明广义 Birkhoff 方程的应用。

例1 Mathieu 方程有如下形式,即

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -(\alpha + \beta\cos 2t)x - \gamma x^3 \tag{8.1.15}$$

式中:α, β, γ 为常数。试将其表为 Birkhoff 方程和广义 Birkhoff 方程。

令

$$a^1 = x, a^2 = y$$

则方程式(8.1.15)表示为

$$
\begin{aligned}
&-\dot{a}^2-(\alpha+\beta\cos 2t)a^1-\gamma(a^1)^3=0\\
&\dot{a}^1-a^2=0
\end{aligned}
\tag{8.1.16}
$$

可将其表示为 Birkhoff 方程，其 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为[5]

$$
\begin{aligned}
&B=\frac{1}{2}\left[(a^2)^2+(\alpha+\beta\cos 2t)(a^1)^2+\frac{1}{2}\gamma(a^1)^4\right]\\
&R_1=\frac{1}{2}a^2, R_2=-\frac{1}{2}a^1
\end{aligned}
\tag{8.1.17}
$$

现将方程式(8.1.16)表示为广义 Birkhoff 方程。令

$$B=0, R_1=\frac{1}{2}a^2, R_1=-\frac{1}{2}a^1 \tag{8.1.18}$$

则有

$$\Lambda_1=-(\alpha+\beta\cos 2t)a^1-\gamma(a^1)^2, \Lambda_2=-a^2 \tag{8.1.19}$$

或者取

$$B=\frac{1}{2}(a^1)^2, R_1=\frac{1}{2}a^2, R_2=-\frac{1}{2}a^1 \tag{8.1.20}$$

则有

$$\Lambda_1=-(\alpha+\beta\cos 2t)a^1-\gamma(a^1)^3, \Lambda_2=0 \tag{8.1.21}$$

或者取

$$
\begin{aligned}
&B=\frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta\cos 2t)(a^1)^2\right]+\frac{1}{2}\gamma(a^1)^4,\\
&R_1=\frac{1}{2}a^2, R_2=-\frac{1}{2}a^1
\end{aligned}
\tag{8.1.22}
$$

则有

$$\Lambda_1=0, \Lambda_2=-a^2 \tag{8.1.23}$$

可见，由于广义 Birkhoff 方程中出现了附加项 Λ_μ，将微分方程表示为广义 Birkhoff 方程要比表示为 Birkhoff 方程来得容易。

例 2　Van der Pol 方程有如下形式，即

$$\ddot{x}+x-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}=0 \tag{8.1.24}$$

试将其表示为 Birkhoff 方程和广义 Birkhoff 方程。

令

$$a^1 = x, a^2 = \dot{x}$$

则方程式(8.1.24)可表示为

$$\dot{a}^1 = a^2, \dot{a}^2 = -a^1 + \varepsilon[1-(a^1)^2]a^2 \tag{8.1.25}$$

按通常方法,取 Birkhoff 函数为系统的总能量,即

$$B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2] \tag{8.1.26}$$

则关于 Birkhoff 函数组 R_1、R_2 的方程为[2,3]

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial R_2}{\partial a^1} - \frac{\partial R_1}{\partial a^2}\right)\left\{-a^1 + \varepsilon\left[1-(a^1)^2\right]a^2\right\} = a^1 + \frac{\partial R_1}{\partial t} \\ &\left(\frac{\partial R_1}{\partial a^2} - \frac{\partial R_2}{\partial a^1}\right)a^2 = a^2 + \frac{\partial R_2}{\partial t} \end{aligned} \tag{8.1.27}$$

由此很难找到 R_1 和 R_2。因此,取 Birkhoff 函数为系统总能量的方法,对此例行不通。

若将 Van der Pol 方程表示为广义 Birkhoff 方程,则容易得多。实际上,可取

$$\begin{aligned} &R_1 = \frac{1}{2}a^2, R_2 = -\frac{1}{2}a^1, B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2] \\ &\Lambda_1 = \varepsilon[1-(a^1)^2]a^2, \Lambda_2 = 0 \end{aligned} \tag{8.1.28}$$

8.2 根据运动性质组建广义 Birkhoff 方程

广义 Birkhoff 系统动力学正问题是指由广义 Birkhoff 方程出发来研究运动性质,而动力学逆问题是指由运动性质来组建广义 Birkhoff 方程。本节研究广义 Birkhoff 系统动力学的两类逆问题,包括根据已知运动性质来组成广义 Birkhoff 方程以及根据已知一部分运动方程和一些运动性质来封闭方程组。

8.2.1 运动方程的组建问题

广义 Birkhoff 系统动力学逆问题的第一种提法是广义 Birkhoff 方程的组建问题。提法如下:给定系统的运动性质,即积分流形

$$\Omega: \ I^\rho(a^\mu,t)=C^\rho \quad (\rho=1,2,\cdots,m\leqslant 2n) \tag{8.2.1}$$

其中某些常数 C^ρ 可以是零。假设函数 $I^\rho(a^\mu,t)$ 在域 $G\{a^\mu\}$ 上对变量是有界的、连续的、可微的,它们是彼此相容且独立的。问题是要按给定的性质式(8.2.1)来组建广义 Birkhoff 方程,使得式(8.2.1)是系统的一个可能的运动。即使式(8.2.1)是系统的第一积分($C^\rho\neq 0$)或特殊积分($C^\rho=0$)。

广义 Birkhoff 方程的组建问题,归结为按性质式(8.2.1)来找到系统的 Birkhoff 函数 B,Birkhoff 函数组 R_μ,以及附加项 $\Lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$。

为解上述逆问题,首先要按给定运动性质式(8.2.1)求得所有的 $\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,而得到一阶微分方程组;其次,将所得一阶微分方程组化成广义 Birkhoff 形式。

首先,将式(8.2.1)对时间 t 求导数,并引入 Ерүгин 函数 Φ_ρ,得到

$$\frac{\partial I^\rho}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu+\frac{\partial I^\rho}{\partial t}=\Phi_\rho(\boldsymbol{I},\boldsymbol{a},t) \quad (\rho=1,2,\cdots,m) \tag{8.2.2}$$

当 C^ρ 为任意常数时,$\Phi_\rho=0$;当 $C^\rho=0$ 时,Φ_ρ 为满足条件

$$\Phi_\rho(0,\boldsymbol{a},t)=0 \tag{8.2.3}$$

的任意函数。由式(8.2.2)可解出 m 个 $\dot{a}^\rho$,表示为

$$\dot{a}^\rho=\frac{\Delta_{l\rho}}{\Delta}\left(\Phi_l-\frac{\partial I^l}{\partial t}\right)-\frac{\Delta^{\rho k}}{\Delta}\dot{a}^k \quad (\rho,l=1,2,\cdots,m;k=m+1,m+2,\cdots,2n) \tag{8.2.4}$$

其中

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial I^\rho}{\partial a^l}\right)_{m\times m} \tag{8.2.5}$$

$\Delta_{l\rho}$ 为 Δ 元素(l,ρ)的代数余子式,$\Delta^{\rho k}$ 为 Δ 中第 ρ 列用式(8.2.2)中矩阵第 k 列替代所得行列式。当 $m=2n$ 时,式(8.2.4)成为

$$\dot{a}^\mu=\frac{\Delta_{\nu\mu}}{\Delta}\left(\Phi_\nu-\frac{\partial I^\nu}{\partial t}\right) \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{8.2.6}$$

当 $m<2n$ 时,由式(8.2.4)不能求出所有 $\dot{a}^\mu(\mu=1,2,\cdots,$

$2n$)。此时,为得到所有 $\dot{a}^\mu$,需补充一些条件。当 $m=2n$ 时,可由式(8.2.6)求得所有 $\dot{a}^\mu$。但是,由于 Ерутин 函数 Φ_ν 的存在,$\dot{a}^\mu$ 仍不能表示为 a,t 的显函数。此时,为确定 Ерутин 函数,需补充一些条件,如有关稳定性、优化等条件。这样,就完成了解逆问题的第一步。

其次,需将方程式(8.2.6)表示为广义 Birkhoff 方程。广义 Birkhoff 方程式(8.1.12)可表示为

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right) \tag{8.2.7}$$

其中

$$\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu} = \delta_\rho^{\ \mu}, \Omega_{\rho\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\rho} - \frac{\partial R_\rho}{\partial a^\nu} \tag{8.2.8}$$

比较方程式(8.2.6)与式(8.2.7),得

$$\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right) = \frac{\Delta_{\nu\mu}}{\Delta}\left(\Phi_\nu - \frac{\partial I^\nu}{\partial t}\right) \quad (\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{8.2.9}$$

或者表示为

$$\frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\Omega^{\nu\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho} + \frac{\partial R_\rho}{\partial t} - \Lambda_\rho\right) + \frac{\partial I^\mu}{\partial t} = \Phi_\mu \quad (\mu,\nu,\rho = 1,2,\cdots,2n) \tag{8.2.10}$$

这样,方程式(8.2.9)或式(8.2.10)可用来确定动力学函数 R_μ、B 和 $\Lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$。

上述动力学逆问题,同其他动力学逆问题一样,一般说没有唯一解,需施加一些限制。

例1 已知4阶系统的4个积分为

$$\begin{aligned} I^1 &= a^2\cos t - a^4\sin t = C^1 \\ I^2 &= a^2\sin t + a^4\cos t = C^2 \\ I^3 &= a^2 + a^3 = C^3 \\ I^4 &= a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t = C^4 \end{aligned} \tag{8.2.11}$$

式中：C^1、C^2、C^3 和 C^4 为任意常数，试建立广义 Birkhoff 方程。

首先，将式(8.2.11)对 t 求导数。因 $C^\mu(\mu=1,2,\cdots,4)$ 是任意常数，故 Ерavailable 函数 $\Phi_\mu=0(\mu=1,2,\cdots,4)$。于是，有

$$\begin{aligned}&\dot{a}^2\cos t-\dot{a}^4\sin t-a^2\sin t-a^4\cos t=0\\&\dot{a}^2\sin t+\dot{a}^4\cos t+a^2\cos t-a^4\sin t=0\\&\dot{a}^2+\dot{a}^3=0\\&\dot{a}^1-\dot{a}^4-(a^2+a^3)-(\dot{a}^2+\dot{a}^3)t=0\end{aligned}\tag{8.2.12}$$

其次，方程式(8.2.10)给出

$$\Omega^{2\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)\cos t-\Omega^{4\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)\sin t-$$

$$a^2\sin t-a^4\cos t=0$$

$$\Omega^{2\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)\sin t+\Omega^{4\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)\cos t+$$

$$a^2\cos t-a^4\cos t=0$$

$$\Omega^{2\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)+\Omega^{3\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)=0$$

$$\Omega^{1\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)-\Omega^{4\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)$$

$$-\Omega^{2\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)t-\Omega^{3\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R_\rho}{\partial t}-\Lambda_\rho\right)t-$$

$$a^2-a^3=0\tag{8.2.13}$$

由方程式(8.2.13)来求动力学函数 R_μ、B 和 $\Lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$，自然没有唯一解。取

$$R_1=\frac{1}{2}a^2,R_2=-\frac{1}{2}a^1,R_3=\frac{1}{2}a^4,R_4=-\frac{1}{2}a^3,B=0\tag{8.2.14}$$

则有

$$
(\boldsymbol{\Omega}^{\mu\rho}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

式(8.2.13)给出

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_1 \cos t - \Lambda_3 \sin t - a^2 \sin t - a^4 \cos t = 0 \\
&\Lambda_1 \sin t + \Lambda_3 \cos t + a^2 \cos t - a^4 \cos t = 0 \\
&\Lambda_1 - \Lambda_4 = 0 \\
&-\Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_1 t + \Lambda_4 t - a^2 - a^3 = 0
\end{aligned} \tag{8.2.15}
$$

由此解得

$$
\Lambda_1 = a^4, \Lambda_2 = -a^3, \Lambda_3 = -a^2, \Lambda_4 = a^4 \tag{8.2.16}
$$

这样,由式(8.2.14)和式(8.2.16)就组建了广义 Birkhoff 方程。

例2 已知2阶系统的一个积分

$$
I = a^1 \cos t + a^2 \sin t = C \tag{8.2.17}
$$

其中 C 为任意常数,试建立广义 Birkhoff 方程。

式(8.2.10)给出

$$
\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \Lambda_2\right)\cos t + \Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1} + \frac{\partial R_1}{\partial t} - \Lambda_1\right)\sin t - a^1 \sin t + a^2 \cos t = 0 \tag{8.2.18}
$$

假设

$$
\frac{\partial R_1}{\partial t} = \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0 \tag{8.2.19}
$$

则有

$$
\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2} - \Lambda_2\right)\cos t + \Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1} - \Lambda_1\right)\sin t = a^1 \sin t - a^2 \cos t \tag{8.2.20}
$$

广义 Birkhoff 方程给出

$$
\dot{a}^1 = \Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2} - \Lambda_2\right), \dot{a}^2 = \Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1} - \Lambda_1\right) \tag{8.2.21}
$$

由式(8.2.20)还不能唯一确定 R_1、R_2、B、Λ_1 和 Λ_2。下面提

出补充要求:要求方程式(8.2.21)的零解 $a_0^1 = a_0^2 = 0$ 是稳定的。为此,取 Ляпунов 函数为

$$V = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2] \tag{8.2.22}$$

并使得按方程式(8.2.21)求得的 $\dot{V}$ 等于零,即

$$\dot{V} = a^1\dot{a}^1 + a^2\dot{a}^2 = \Omega^{12}a^1\left(\frac{\partial B}{\partial a^2} - \Lambda_2\right) + \Omega^{21}a^2\left(\frac{\partial B}{\partial a^1} - \Lambda_1\right) = 0$$

因 $\Omega^{12} = -\Omega^{21}$,故有

$$a^1\left(\frac{\partial B}{\partial a^2} - \Lambda_2\right) = a^2\left(\frac{\partial B}{\partial a^1} - \Lambda_1\right) \tag{8.2.23}$$

它有如下解

$$B = 0, \Lambda_1 = a^1, \Lambda_2 = a^2 \tag{8.2.24}$$

$$B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2], \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0 \tag{8.2.25}$$

将式(8.2.24)或式(8.2.25)代入式(8.2.20),可求得

$$\Omega^{12} = 1 \tag{8.2.26}$$

最后,有

$$R_1 = 0, R_2 = -a^1, B = 0, \Lambda_1 = a^1, \Lambda_2 = a^2 \tag{8.2.27}$$

$$R_1 = a^2, R_2 = 0, B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2], \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0 \tag{8.2.28}$$

式(8.2.27)对应一个广义 Birkhoff 系统,式(8.2.28)对应一个 Birkhoff 系统。

8.2.2 运动方程的封闭问题

广义 Birkhoff 系统动力学逆问题的第二种提法是广义 Birkhoff 方程的封闭问题。这类逆问题有如下提法。

给定系统的部分运动方程

$$\dot{a}^r = \sigma^r(\boldsymbol{a}, t) \quad (r = 1, 2, \cdots, m' \leqslant 2n) \tag{8.2.29}$$

以及运动性质

$$I^s(\boldsymbol{a}, t) = C^s \quad (s = m'+1, m'+2, \cdots, m \leqslant 2n) \tag{8.2.30}$$

来找到全部运动方程，并将其表为广义 Birkhoff 方程。

为解上述逆问题，需将式(8.2.30)对 t 求导数，并联合方程式(8.2.29)求出全部或部分 $\dot{a}^\mu$。在求出所有 $\dot{a}^\mu$ 后，可按式(8.2.7)来求 R_μ、B 和 Λ_μ。这类逆问题，一般说来没有唯一解。

例3　质量为 m 的质点按规律

$$\dot{a}^1 = \frac{1}{m}a^2\exp(-2ba^1) \tag{8.2.31}$$

而运动，其中 b 为常数，a^2 为某个变量。要求建立封闭的广义 Birkhoff 方程组，使得以给定性质

$$I = \frac{1}{2m}(a^2)^2\exp(-2ba^1) - \frac{mg}{2b}[\exp(2ba^1) - 1] = \text{常数} \tag{8.2.32}$$

的运动是系统的一个可能运动。

首先，求出 $\dot{a}^2$。将式(8.2.32)对 t 求导数，并利用方程式(8.2.31)，得

$$\dot{a}^2 = \frac{b}{m}(a^2)^2\exp(-2ba^1) + mg\exp(2ba^1) \tag{8.2.33}$$

其次，求动力学函数 R_μ、B 和 Λ_μ。式(8.2.7)给出

$$\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \Lambda_2\right) = \frac{1}{m}a^2\exp(-2ba^1)$$

$$\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1} + \frac{\partial R_1}{\partial t} - \Lambda_1\right) = \frac{b}{m}(a^2)^2\exp(-2ba^1) + mg\exp(2ba^1) \tag{8.2.34}$$

方程式(8.2.34)对 R_1、R_2、B、Λ_1 和 Λ_2 来说，没有唯一解。现取

$$R_1 = a^2, R_2 = 0, B = -\frac{mg}{2b}\exp(2ba^1) \tag{8.2.35}$$

则由方程式(8.2.34)得到

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{m}a^2\exp(-2ba^1), \Lambda_2 = \frac{b}{m}(a^2)^2\exp(-2ba^1) \tag{8.2.36}$$

参考文献[5]对此问题构造了 Birkhoff 系统的动力学函数 R_1、

R_2 和 B。

8.3 广义 Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题

本节研究广义 Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题,包括广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性以及与 Noether 对称性相关的两类动力学逆问题。

8.3.1 广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

取时间 t 和变量 a^μ 的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t, a^{\mu *} = a^\mu + \Delta a^\mu \tag{8.3.1}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, \boldsymbol{a}), a^{\mu *} = a^\mu + \varepsilon_\alpha \xi_\mu^\alpha(t, \boldsymbol{a}) \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, r; \mu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{8.3.2}$$

式中:ε_α 为无限小参数;ξ_0^α、ξ_μ^α 为无限小生成元。

Pfaff 作用量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \{R_\mu \mathrm{d}a^\mu - B\mathrm{d}t\} \tag{8.3.3}$$

的全变分可表示为[6]

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ (R_\mu \dot{a}^\mu - B) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} \right) \Delta t + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \Delta a^\mu + R_\mu \Delta \dot{a}^\mu \Big\} \mathrm{d}t \tag{8.3.4}$$

或

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_\alpha \Big\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha) + \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right] \bar{\xi}_\mu^\alpha \Big\} \mathrm{d}t \tag{8.3.5}$$

其中

$$\bar{\xi}_\mu^\alpha = \xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu \xi_0^\alpha \tag{8.3.6}$$

如果

$$\Delta A = 0 \tag{8.3.7}$$

则称变换式(8.3.1)为Noether意义下的对称变换。

如果

$$\Delta A = -\int_{t_1}^{t_2} \Delta G_N \mathrm{d}t \tag{8.3.8}$$

其中 $\Delta G_N = \varepsilon_\alpha G_N^\alpha$,则称变换式(8.3.1)为Noether意义下的准对称变换。

如果

$$\Delta A = -\int_{t_1}^{t_2} (\Delta G_N + \Lambda_\mu \delta a^\mu)\,\mathrm{d}t \tag{8.3.9}$$

则称变换式(8.3.1)为Noether意义下的广义准对称变换。

广义准对称变换的判据在取 $\alpha = 1$ 时归结为广义Noether等式[6]

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu + R_\mu \dot{\xi}_\mu - B\dot{\xi}_0 + \Lambda_\mu(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) + \dot{G}_N = 0 \tag{8.3.10}$$

展开式(8.3.10),得到广义Killing方程[6]

$$R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} - \Lambda_\mu \xi_0 = -\frac{\partial G_N}{\partial a^\nu}$$

$$(\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n) \tag{8.3.11}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} - \Lambda_\mu \xi_\mu = \frac{\partial G_N}{\partial t}$$

$$(\mu = 1,2,\cdots,2n) \tag{8.3.12}$$

广义Birkhoff系统的Noether定理有如下结果。

命题1 如果无限小生成元 ξ_0、ξ_μ 和规范函数 G_N 满足广义Noether等式(8.3.10),则广义Birkhoff系统存在Noether守恒量

$$I_N = R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G_N = 常数 \tag{8.3.13}$$

命题2 如果无限小生成元 ξ_0、ξ_μ 和规范函数 G_N 满足广义

Killing 方程式(8.3.11)、式(8.3.12),则广义 Birkhoff 系统存在 Noether 守恒量式(8.3.13)。

广义 Birkhoff 系统动力学正问题是指,给定系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ 以及附加项 $\Lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,寻求系统的运动性质,特别是寻求广义准对称变换,进而求得守恒量。

8.3.2 逆问题的第一种提法和解法

广义 Birkhoff 系统动力学逆问题的第一种提法如下:已知系统的 Birkhoff 函数组 R_μ 以及附加项 $\Lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,按给定的一个积分

$$I(a^\mu,t)=C \tag{8.3.14}$$

以及广义 Killing 方程式(8.3.11)、式(8.3.12),来寻求系统的 Birkhoff 函数 B,广义准对称变换的生成元 ξ_0、ξ_μ 以及规范函数 G_N。

为解上述逆问题,可令积分式(8.3.14)等于 Noether 对称性的守恒量式(8.3.13),即令

$$R_\mu\xi_\mu-B\xi_0+G_N=I \tag{8.3.15}$$

将式(8.3.15)对 a^ν 和 t 求偏导数,分别得到

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\xi_\mu+R_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\xi_0-B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu}+\frac{\partial G_N}{\partial a^\nu}=\frac{\partial I}{\partial a^\nu} \tag{8.3.16}$$

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\xi_\mu+R_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0-B\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial G_N}{\partial t}=\frac{\partial I}{\partial t} \tag{8.3.17}$$

将式(8.3.16)与式(8.3.11)、式(8.3.17)与式(8.3.12)相减,分别得到

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\xi_\mu+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^\nu}-\Lambda_\nu\right)\xi_0=-\frac{\partial I}{\partial a^\nu} \tag{8.3.18}$$

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\Lambda_\mu\right)\xi_\mu=\frac{\partial I}{\partial t} \tag{8.3.19}$$

由式(8.3.18)解出 ξ_μ,得

$$\xi_\mu=\Omega^{\mu\nu}\left[\frac{\partial I}{\partial a^\nu}+\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}-\Lambda_\nu\right)\xi_0\right] \tag{8.3.20}$$

再将式(8.3.20)代入式(8.3.19),得

$$\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^{\nu}}=\frac{\partial I}{\partial t}-\left(\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}-\Lambda_{\mu}\right)\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^{\nu}} \tag{8.3.21}$$

这里已用到广义 Birkhoff 方程的形式。式(8.3.21)就是为确定 Birkhoff 函数 B 的偏微分方程。解此方程可求出函数 B。

于是,这类逆问题的解法可按下述步骤进行:首先,建立偏微分方程式(8.3.21)并由此求出函数 B;其次,由式(8.3.20)求出生成元 ξ_{μ} 和 ξ_0 的关系;最后,将所得 ξ_{μ}、ξ_0 和 B 代入式(8.3.15)而求得规范函数 G_N。

例 1　已知 4 阶广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组为

$$R_1=R_2=0,R_3=a^1,R_4=a^2 \tag{8.3.22}$$

附加项

$$\Lambda_1=a^4,\Lambda_2=-a^3,\Lambda_3=\Lambda_4=0 \tag{8.3.23}$$

以及一个积分

$$I=a^1+a^2-a^3+a^4=C \tag{8.3.24}$$

试求系统的 Birkhoff 函数 B,广义准对称变换的生成元 ξ_{μ}、ξ_0 以及规范函数 G_N。

首先,求 Birkhoff 函数 B。式(8.3.21)给出

$$\frac{\partial B}{\partial a^1}+\frac{\partial B}{\partial a^2}+\frac{\partial B}{\partial a^3}+\frac{\partial B}{\partial a^4}=a^3+a^4$$

它有解

$$B=\frac{1}{2}(a^3)^2+\frac{1}{2}(a^4)^2 \tag{8.3.25}$$

其次,求生成元 $\xi_{\mu}(\mu=1,2,\cdots,4)$ 和 ξ_0。式(8.3.20)给出

$$\xi_1=1-a^3\xi_0,\xi_2=-1-a^4\xi_0,\xi_3=1-a^4\xi_0,\xi_2=1+a^3\xi_0$$

不妨取

$$\xi_0=0 \tag{8.3.26}$$

则有

$$\xi_1=1,\xi_2=-1,\xi_3=1,\xi_4=1 \tag{8.3.27}$$

最后,求规范函数 G_N。将式(8.3.25)、式(8.3.26)、式(8.3.27)

和式(8.3.24)代入式(8.3.14),得到

$$G_N = -a^4 + a^3 \tag{8.3.28}$$

例2 已知4阶广义 Birkhoff 系统的部分动力学函数

$$\begin{gathered} R_1 = \frac{1}{2}a^3, R_2 = \frac{1}{2}a^4, R_3 = -\frac{1}{2}a^1, R_4 = -\frac{1}{2}a^2 \\ \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = a^2, \Lambda_4 = -a^1 \end{gathered} \tag{8.3.29}$$

以及一个积分

$$I = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2] \tag{8.3.30}$$

试求 Birkhoff 函数 B,广义准对称变换的生成元 ξ_μ、ξ_0 以及规范函数 G_N。

首先,求 Birkhoff 函数 B。式(8.3.21)给出

$$\frac{\partial B}{\partial a^1}a^3 + \frac{\partial B}{\partial a^2}a^4 + \frac{\partial B}{\partial a^3}(-a^1) + \frac{\partial B}{\partial a^4}(-a^2) = 0 \tag{8.3.31}$$

它有解

$$B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^3)^2] \tag{8.3.32}$$

$$B = \frac{1}{2}[(a^2)^2 + (a^4)^2] \tag{8.3.33}$$

$$B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2] \tag{8.3.34}$$

为确定唯一的函数 B,尚需施加限制。例如,要求 $a^\mu = 0(\mu = 1, 2,\cdots,4)$ 是系统的孤立平衡位置并且是稳定的,则应选式(8.3.34)作为 Birkhoff 函数。

其次,求生成元 ξ_μ 和 ξ_0。将式(8.3.34)代入式(8.3.20),得到

$$\begin{gathered} \xi_1 = a^3 + (a^3 - a^2)\xi_0, \xi_2 = a^4 + (a^4 + a^1)\xi_0, \xi_3 = \\ -a^1 - a^1\xi_0, \xi_2 = -a^2 - a^2\xi_0 \end{gathered} \tag{8.3.35}$$

它有解

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = a^2, \xi_2 = -a^1, \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{8.3.36}$$

当然,还有其他解。

最后,求规范函数 G_N。将式(8.3.29)、式(8.3.34)、式

(8.3.36)和式(8.3.24)代入式(8.3.15),得到

$$G_N = \frac{1}{2}(a^1 a^4 - a^2 a^3) \tag{8.3.37}$$

8.3.3 逆问题的第二种提法和解法

广义 Birkhoff 系统动力学逆问题的第二种提法如下:已知广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数 B,附加项 $\Lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,按给定的积分

$$I(a^\mu, t) = C \tag{8.3.38}$$

以及广义 Killing 方程式(8.3.11)、式(8.3.12)来求 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,广义准对称变换的生成元 ξ_0、ξ_μ 和规范函数 G_N。

为解上述逆问题,可利用关系式(8.3.18)和式(8.3.19)建立对 R_μ、ξ_μ 和 ξ_0 的方程并求解。显然,这类逆问题也没有唯一解。

例 3 已知一个 2 阶广义 Birkhoff 系统中有

$$B = -\frac{1}{2}(a^2)^2, \Lambda_1 = \frac{2}{t}a^2 + (a^1)^5, \Lambda_2 = 0 \tag{8.3.39}$$

并给定积分

$$I = t^3(a^2)^2 + t^2 a^1 a^2 + \frac{1}{3}t^3(a^1)^6 \tag{8.3.40}$$

试求 Birkhoff 函数组 R_1、R_2,广义准对称变换的生成元 ξ_1、ξ_2、ξ_0 和规范函数 G_N。

式(8.3.18)和式(8.3.19)给出

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial a^2} - \frac{\partial R_2}{\partial a^1}\right)\xi_2 + \left[\frac{\partial R_1}{\partial t} - \frac{2}{t}a^2 - (a^1)^5\right] = -t^2 a^2 - 2t^3(a^1)^5$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial a^1} - \frac{\partial R_1}{\partial a^2}\right)\xi_1 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial t} - a^2\right)\xi_0 = -2t^3 a^2 - t^2 a^1$$

$$\left[\frac{\partial R_1}{\partial t} - \frac{2}{t}a^2 - (a^1)^5\right]\xi_1 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial t} - a^2\right)\xi_2 = 3t^2(a^2)^2 + 2ta^1 a^2 + t^2(a^1)^6 \tag{8.3.41}$$

由此还不能唯一地确定 R_1、R_2、ξ_1、ξ_2 和 ξ_0。现令

$$\frac{\partial R_1}{\partial t}=\frac{\partial R_2}{\partial t}=\xi_0=0 \tag{8.3.42}$$

则有

$$\Omega_{21}\xi_2=-t^2a^2-2t^3(a^1)^5$$

$$\Omega_{12}\xi_1=-2t^3a^2-t^2a^1$$

$$\left[-\frac{2}{t}a^2-(a^1)^5\right]\xi_1-a^2\xi_2=3t^2(a^2)^2+2ta^1a^2+t^2(a^1)^6$$

由此解得

$$\xi_1=-2t^3a^2-t^2a^1,\xi_2=t^2a^2+2t^3(a^1)^5 \tag{8.3.43}$$

以及

$$\Omega_{12}=1 \tag{8.3.44}$$

由式(8.3.44)可求得

$$R_1=0,R_2=a^1 \tag{8.3.45}$$

最后,将式(8.3.39)、式(8.3.40)、式(8.3.42)、式(8.3.43)和式(8.3.45)代入式(8.3.15),得到规范函数

$$G_N=t^3(a^2)^2-\frac{5}{3}t^3(a^1)^6 \tag{8.3.46}$$

8.3.4 逆问题的第三种提法和解法

广义 Birkhoff 系统动力学逆问题的第三种提法如下:已知广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数 B, Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,按给定积分

$$I(a^\mu,t)=C \tag{8.3.47}$$

和广义 Killing 方程式(8.3.11)、式(8.3.12)来求附加项 Λ_μ,广义准对称变换的生成元 ξ_0、ξ_μ 以及规范函数 G_N。

为解上述逆问题,可将方程式(8.3.21)改写为如下形式,即

$$\Lambda_\mu\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^\nu}=\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial a^\nu}-\frac{\partial I}{\partial t} \tag{8.3.48}$$

在已知 B、R_μ、I 下,这是关于 Λ_μ 的一个代数方程。由此可求得附加项 Λ_μ 之间的关系。然后,利用式(8.3.20)求得 ξ_0、ξ_μ 和已知的

R_μ、B 和 I 代入式(8.3.15)而求得规范函数 G_N。

例 4　已知 2 阶广义 Birkhoff 系统的部分动力学函数

$$R_1=0, R_2=a^1, B=-\frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{8.3.49}$$

和积分

$$I=t^3(a^2)^2+t^2a^1a^2+\frac{1}{3}t^3(a^1)^6 \tag{8.3.50}$$

试求附加项 Λ_1、Λ_2，广义准对称变换的生成元 ξ_1、ξ_2、ξ_0 以及规范函数 G_N。

首先，求附加项。将式(8.3.49)、式(8.3.50)代入式(8.3.48)，得到

$$-\Lambda_1(2t^3a^2+t^2a^1)+\Lambda_2[t^2a^2+t^3(a^1)^5]=$$
$$-a^2[t^2a^2+t^3(a^1)^5]-3t^2(a^2)^2+2ta^1a^2+t^2(a^1)^6 \tag{8.3.51}$$

由式(8.3.51)还不能唯一确定 Λ_1 和 Λ_2。可取

$$\Lambda_2=0 \tag{8.3.52}$$

将其代入式(8.3.51)，得

$$\Lambda_1=\frac{2}{t}a^2+(a^1)^5 \tag{8.3.53}$$

其次，求生成元。将式(8.3.49)、式(8.3.50)、式(8.3.52)和式(8.3.53)代入式(8.3.20)，得到

$$\xi_1=-(2t^3a^2+t^2a^1-a^2\xi_0)$$
$$\xi_2=t^2a^2+2t^3(a^1)^5-\left[\frac{2}{t}a^2+(a^1)^5\right]\xi_0 \tag{8.3.54}$$

由此还不能唯一确定 ξ_1、ξ_2 和 ξ_0。可取

$$\xi_0=0 \tag{8.3.55}$$

则有

$$\xi_1=-2t^3a^2+t^2a^1, \xi_2=t^2a^2+2t^3(a^1)^5 \tag{8.3.56}$$

或取

$$\xi_0=2t^3 \tag{8.3.57}$$

则有

$$\xi_1=-t^2a^1, \xi_2=-3t^2a^2 \tag{8.3.58}$$

最后,求规范函数。将式(8.3.49)、式(8.3.50)、式(8.3.55)和式(8.3.56)代入式(8.3.15),得到

$$G_N = t^3(a^2)^2 - \frac{5}{3}t^3(a^1)^6 \tag{8.3.59}$$

若将式(8.3.49)、式(8.3.50)、式(8.3.57)和式(8.3.58)代入式(8.3.15),则得

$$G_N = 4t^2 a^1 a^2 + \frac{1}{3}t^3(a^1)^6 \tag{8.3.60}$$

本节研究的广义 Birkhoff 系统动力学的三类逆问题,一般说,都没有唯一解。为最终解出这些逆问题,需要给出一些限制。

8.4 根据微分变分原理组建运动方程

本节研究由微分变分原理来组建广义 Birkhoff 方程的问题,包括广义 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理以及由此原理提出的一类动力学逆问题的解法。

8.4.1 微分变分原理

与广义 Birkhoff 系统相关的微分变分原理有形式式(8.1.11),即

$$\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu\right]\delta a^\mu = 0 \tag{8.4.1}$$

如果原理式(8.4.1)中没有附加项 Λ_μ,则它成为 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理[6],即

$$\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\delta a^\mu = 0 \tag{8.4.2}$$

因此,原理式(8.4.1)可称为广义 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理。

如果原理式(8.4.1)中的变分 δa^μ 是彼此独立的,则可导出广义 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu=0\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{8.4.3}$$

如果 δa^μ 不是彼此独立的，便得不到方程式(8.4.3)。此时，需给出对 δa^μ 的限制，而得到相应的运动方程。

8.4.2 逆问题的提法和解法

动力学逆问题提法如下：从原理式(8.4.1)出发，要求按给定运动性质

$$\Omega:I^\rho(a^\mu,t)=0\quad(\rho=1,2,\cdots,m\leqslant 2n)\tag{8.4.4}$$

的运动是系统的可能运动。假设函数 I^ρ 彼此相容、独立，对其变量连续可微。

为解上述逆问题，将式(8.4.4)对 t 求导数，并引入 Еругин 函数，得到

$$\frac{\partial I^\rho}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu+\frac{\partial I^\rho}{\partial t}=\Phi_\rho(\boldsymbol{I},\boldsymbol{a},t)\quad(\rho=1,2,\cdots,m\leqslant 2n;\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{8.4.5}$$

对式(8.4.4)取等时变分，得

$$\frac{\partial I^\rho}{\partial a^\mu}\delta a^\mu=0\tag{8.4.6}$$

假设由此可解出 m 个 δa^ρ，并记作

$$\delta a^\rho=C_{\rho\sigma}(t,\boldsymbol{a})\delta a^\sigma\quad(\rho=1,2,\cdots,m;\sigma=m+1,m+2,\cdots,2n)\tag{8.4.7}$$

将式(8.4.7)代入原理式(8.4.1)，由 δa^σ 的独立性，得到

$$\Omega_{\sigma\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\sigma}-\frac{\partial R_\sigma}{\partial t}+\Lambda_\sigma+C_{\rho\sigma}\left(\Omega_{\rho\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\rho}-\frac{\partial R_\rho}{\partial t}+\Lambda_\rho\right)=0$$

$$(\rho=1,2,\cdots,m;\sigma=m+1,m+2,\cdots,2n)\tag{8.4.8}$$

这样，式(8.4.5)、式(8.4.8)就是所论问题的运动方程。

所得到的方程允许系统按给定性质式(8.4.4)而运动，并且仅当初始条件 $t=t_0, a^\mu=a_0^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 满足式(8.4.4)，即当

满足

$$I^{\rho}(a_0^{\mu},t_0)=0 \quad (\rho=1,2,\cdots,m\leqslant 2n) \tag{8.4.9}$$

时，这个运动才存在。自然可假设条件式(8.4.9)实际上不满足，因此，可以要求当系统有对条件式(8.4.9)的初始偏离时，相对给定性质式(8.4.4)是稳定的，或渐近稳定的。这个要求可用来选取尚未确定的 Еругин 函数 Φ_{ρ}。

8.4.3 算例

假设广义广义 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理有如下形式，即

$$(\dot a^3-a^1)\delta a^1+(\dot a^4-a^2)\delta a^2+(-\dot a^1-a^3)\delta a^3+(-\dot a^2-a^4)\delta a^4=0 \tag{8.4.10}$$

给定运动性质为

$$I^1=a^1+a^2=0 \tag{8.4.11}$$

$$I^2=a^3+a^4=0 \tag{8.4.12}$$

试组建运动方程，并按稳定性要求选取 Еругин 函数 Φ_1 和 Φ_2。

式(8.4.8)和式(8.4.5)给出

$$\begin{gathered}\dot a^3-a^1-\dot a^4+a^2=0,\ -\dot a^1-a^3+\dot a^2+a^4=0\\ \dot a^1+\dot a^2=\Phi_1,\ \dot a^3+\dot a^4=\Phi_2\end{gathered} \tag{8.4.13}$$

由此解得

$$\begin{gathered}\dot a^1=\frac{1}{2}(\Phi_1-a^3+a^4),\ \dot a^2=\frac{1}{2}(\Phi_1+a^3-a^4)\\ \dot a^3=\frac{1}{2}(\Phi_2+a^1-a^2),\ \dot a^4=\frac{1}{2}(\Phi_2-a^1-a^2)\end{gathered} \tag{8.4.14}$$

为求得 Еругин 函数，提出如下要求：要求方程式(8.4.14)的零解 $a^{\mu}=0(\mu=1,2,\cdots,4)$ 是稳定的，并且要满足

$$\Phi_1|_{a^1+a^2=0}=0,\ \Phi_2|_{a^3+a^4=0}=0 \tag{8.4.15}$$

为此，选 Ляпунов 函数为

$$V=\frac{1}{2}[(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2] \tag{8.4.16}$$

按方程式(8.4.14)求 $\dot V$，得

$$\dot{V}=\frac{1}{2}(a^1+a^2)\Phi_1+\frac{1}{2}(a^3+a^4)\Phi_2 \quad (8.4.17)$$

选 Еругин 函数为

$$\Phi_1=(a^1+a^2)(a^3+a^4)^2,\Phi_2=-(a^3+a^4)(a^1+a^2)^2 \quad (8.4.18)$$

可使 $\dot{V}$ 为零，由 Ляпунов 定理可知，零解是稳定的，同时，式(8.4.18)也满足式(8.4.15)。

8.5 广义 Poisson 方法与动力学逆问题

本节研究广义 Birkhoff 系统的广义 Poisson 方法与动力学逆问题，根据系统的广义 Poisson 条件提出并解决一类动力学逆问题。

8.5.1 广义 Poisson 条件

如果 $I=I(a^\mu,t)$ 是广义 Birkhoff 系统的积分，则有

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}-\Lambda_\nu\right)=0 \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \quad (8.5.1)$$

反之，如果 I 满足式(8.5.1)，则 I 必是广义 Birkhoff 系统的积分。式(8.5.1)称为广义 Birkhoff 系统的广义 Poisson 条件。

与广义 Poisson 条件相关的动力学正问题是指，对给定的动力学函数 R_μ、B 和 $\Lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$，利用条件式(8.5.1)来判断积分或寻求积分。

8.5.2 逆问题的提法和解法

与广义 Poisson 条件相关的动力学逆问题的提法如下：根据已知第一积分

$$I(a^\mu,t)=C \quad (8.5.2)$$

来求广义 Birkhoff 系统中的动力学函数 R_μ、B 和 Λ_μ。

为解上述逆问题，需将式(8.5.2)代入广义 Poisson 条件式

(8.5.1)中，得到关于 R_μ、B 和 Λ_μ 的一个偏微分方程。再由这个偏微分方程找到这 $(2n+1)$ 个函数。显然，这类逆问题没有唯一解。

8.5.3 算例

已知2阶广义 Birkhoff 系统的一个积分

$$I=t^3(a^2)^2+t^2a^1a^2+\frac{1}{3}t^3(a^1)^6 \tag{8.5.3}$$

试求系统的动力学函数 R_1、R_2、B、Λ_1 和 Λ_2。

将式(8.5.3)代入广义 Poisson 条件式(8.5.1)中，得到

$$3t^2(a^2)^2+2ta^1a^2+t^2(a^1)^6+[t^2a^2+2t^3(a^1)^5]\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}+\frac{\partial R_2}{\partial t}-\Lambda_2\right)+(2t^3a^2+t^2a^1)\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}+\frac{\partial R_1}{\partial t}-\Lambda_1\right)=0 \tag{8.5.4}$$

偏微分方程式(8.5.4)中有5个未知函数 R_1、R_2、B、Λ_1 和 Λ_2，因此没有唯一解。

现在取

$$R_1=0, R_2=a^1 \tag{8.5.5}$$

则有

$$\Omega^{12}=-\Omega^{21}=-1$$

此时方程式(8.5.4)成为

$$3t^2(a^2)^2+2ta^1a^2+t^2(a^1)^6+[t^2a^2+2t^3(a^1)^5]\left(-\frac{\partial B}{\partial a^2}+\Lambda_2\right)+(2t^3a^2+t^2a^1)\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)=0$$

由此可取

$$\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1=-\frac{2}{t}a^2-(a^1)^5$$

$$\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2=-a^2$$

由此可取

$$B = -\frac{1}{2}(a^2)^2, \Lambda_1 = \frac{2}{t}a^2 + (a^1)^5, \Lambda_2 = 0 \qquad (8.5.6)$$

这样,式(8.5.5)和式(8.5.6)就给出逆问题的一个解。

若取

$$R_1 = \frac{1}{2}t^2a^2, R_2 = -\frac{1}{2}t^2a^1, B = 0 \qquad (8.5.7)$$

则式(8.5.4)成为

$$3t^2(a^2)^2 + 2ta^1a^2 + t^2(a^1)^6 + [t^2a^2 + 2t^3(a^1)^5]$$

$$\frac{1}{t^2}(-ta^1 - \Lambda_2) + (2t^3a^2 + t^2a^1)\left(-\frac{1}{t^2}\right)(ta^2 - \Lambda_1) = 0$$

由此可得

$$\Lambda_1 = -t^2(a^1)^5 - ta^2, \Lambda_2 = -t^3a^2 - ta^1 \qquad (8.5.8)$$

这样,式(8.5.7)和式(8.5.8)就给出逆问题的另一个解。

参考文献

[1] Mei Fengxiang. The Noether's theory of Birkhoffian systems. Science in China, Series A, 1993, 36(12): 1456 - 1467.

[2] Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ. New York: Springer - Verlag, 1983.

[3] 梅凤翔,等. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版社, 1996.

[4] Mei Fengxiang. On the Birkhoffian mechanics. Int. J. of Non - Linear Mech., 2001, 36(5): 817 - 834.

[5] Галиуллин А С, Гафаров Г Г, Малайшка Р П, Хван А М. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. Москва: РЖУФН, 1997.

[6] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京:科学出版社, 1999.

第 9 章　其他动力学逆问题

本章简略介绍某些其他动力学逆问题,包括振动力学逆问题、多体动力学逆问题、转子动力学逆问题、弹性动力学逆问题、结构动力学逆问题等。

9.1　振动力学逆问题

经典振动理论主要考虑各种离散或连续体的无限小无阻尼自由振动。这个理论的基本问题是确定振动物体的固有频率或简正模态。离散系统的运动微分方程是常微分方程,它有有限个特征值。连续系统的控制方程是偏微分方程,它有无穷多个特征值,其简正模态为空间变量的函数。

振动理论的逆问题是考虑构造某种模型,例如,弹簧—质点系统、弦等,使其具有给定的特征值或特征函数,即具有给定的谱数据。一般说来,给定这些谱数据后,可能不存在,也可能有一个或多个系统具有这些性质。因此,振动力学逆问题可以有各种提法,而且一般说来也没有唯一解。参考文献[1]专门讨论一类比较严格的逆问题,即构造问题。在这类逆问题中,给定的谱数据使得有且仅有一个指定类型的振动系统具有这些谱性质。

研究一个简单的逆问题:构造一个弹簧—质点系统,使系统有两个频率 $\omega_1^2=\lambda_1,\omega_2^2=\lambda_2$。取质量同为 m 的两个质点,中间用刚度为 k_2 的弹簧连接,一个质点再用刚度为 k_1 的弹簧固定,则有

$$\omega_1^2=\lambda_1=\frac{k_1+k_2}{m},\omega_2^2=\lambda_2=\frac{k_2}{m} \tag{9.1.1}$$

由此解得

$$m:k_1:k_2=1:(\lambda_1-\lambda_2):\lambda_2 \tag{9.1.2}$$

这就是逆问题的一般解。为得到唯一解,尚需补充一个条件,例如,指定 m,或 k_1,或 k_2,或 k_1+k_2。注意到,这里要求 $\lambda_1>\lambda_2>0$。

对多自由度线性系统的自由振动,控制方程可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=0 \tag{9.1.3}$$

式中:$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵;$\boldsymbol{C}$ 为阻尼矩阵;$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵;都是 $n\times n$ 方阵;$\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、$\ddot{\boldsymbol{q}}$ 分别为广义坐标、广义速度和广义加速度列阵。对系统式(9.1.3)可提出如下逆问题:已知系统的响应、质量阵和刚度阵,求阻尼矩阵。研究最简单情形:已知单自由度线性系统阻尼自由振动频率 ω_d,求阻尼系数 C。由阻尼系统的自由振动,有

$$\omega_d=\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} \tag{9.1.4}$$

其中

$$\omega_n=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2},\zeta=\frac{C}{2m\omega_n} \tag{9.1.5}$$

由式(9.1.4)、式(9.1.5)解得阻尼系数

$$C=2m\left(\frac{k}{m}-\omega_d^2\right)^{1/2} \tag{9.1.6}$$

这就是逆问题的一般解。为得到唯一解,尚需补充两个条件。例如,给定质点质量 m 和弹簧刚度 k;或者给定无阻尼自由振动频率 ω_n 和质量 m;或者给定无阻尼振动频率 ω_n 和弹簧刚度 k。注意到,给定的数据必须满足

$$\frac{k}{m}>\omega_d^2 \tag{9.1.7}$$

对于多自由度线性系统,往往通过实验获得必要的数据,反过来求阻尼阵。这是个复杂问题。参考文献[2]给出了一个实验模型。对于非线性振动系统,动力学逆问题的提法和解法将有更大困难。

下面研究一类逆问题:给定两组严格递增的数列 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 和 $\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_N^*$ 满足

$$\lambda_1 < \lambda_1^* < \lambda_2 < \lambda_2^* < \cdots < \lambda_N < \lambda_N^* \tag{9.1.8}$$

确定 N 阶 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{B}$，它以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ 为特征值；而由它的元素 a_N 换成 a_N^* 所得到的矩阵 $\boldsymbol{B}^*$ 具有特征值 $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_N^*$。现在说明从已知条件怎样来确定对应于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 u_N^i。注意到，λ_1^*，$\lambda_2^*, \cdots, \lambda_N^*$ 是方程

$$\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} \tag{9.1.9}$$

的特征值。令

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{N} a_i \boldsymbol{u}^{(i)} \tag{9.1.10}$$

则有

$$\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + (a_N^* - a_N) u_N \boldsymbol{e}^{(N)} \tag{9.1.11}$$

于是方程式(9.1.9)可表示为

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i \boldsymbol{u}^{(i)} + (a_N^* - a_N) u_N \boldsymbol{e}^{(N)} = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i \boldsymbol{u}^{(i)} \tag{9.1.12}$$

因此，有

$$(\lambda - \lambda_i) a_i = (a_N^* - a_N) u_N u_N^{(i)} \tag{9.1.13}$$

将式(9.1.13)代入式(9.1.10)，得到

$$\boldsymbol{u} = (a_N^* - a_N) u_N \sum_{i=1}^{N} \frac{u_N^{(i)} \boldsymbol{u}^{(i)}}{\lambda - \lambda_i} \tag{9.1.14}$$

由上述方程两端最后一个分量相等，得到特征值方程

$$1 = (a_N^* - a_N) \sum_{i=1}^{N} \frac{[u_N^{(i)}]^2}{\lambda - \lambda_i} \tag{9.1.15}$$

此方程的根为 $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_N^*$，于是，有

$$1 - (a_N^* - a_N) \sum_{i=1}^{N} \frac{[u_N^{(i)}]^2}{\lambda - \lambda_i} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\lambda - \lambda_i^*}{\lambda - \lambda_i} \right) \tag{9.1.16}$$

因此，有

$$(a_N^* - a_N) [u_N^{(i)}]^2 = (\lambda_i^* - \lambda_i) \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_j^*}{\lambda_i - \lambda_j} \right) \tag{9.1.17}$$

比较 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}^*$ 的迹，可知

$$(a_N^* - a_N) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^* - \lambda_j > 0 \qquad (9.1.18)$$

于是，用已知条件表示了 $[u_N^{(i)}]^2$，而条件式(9.1.8)保证 $[u_N^{(i)}]^2$ 是正的。

下面研究弹簧—质点系统的特征值逆问题。

考虑如下两个系统(图 9-1)，其中图 9-1(a)为 N 个质点，用 N 个弹簧连接，右端自由。图 9-1(b)为 N 个质点，用 N 个弹簧连接，而右端用刚度为 k_{N+1} 的弹簧连接在固定点上。

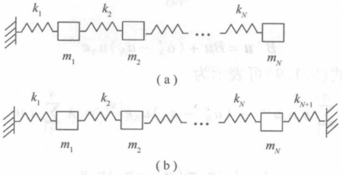


图 9-1 弹簧—质点系统

系统图 9-1(a)和图 9-1(b)的矩阵方程分别为

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} =$$

$$\lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad (9.1.19)$$

和

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_N & k_N+k_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} =$$

$$\lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \tag{9.1.20}$$

将上述方程写成如下形式，即

$$(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0 \tag{9.1.21}$$

和

$$(\boldsymbol{C}^*-\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0 \tag{9.1.22}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}^{1/2}\boldsymbol{M}^{1/2},\boldsymbol{x}=\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{u} \tag{9.1.23}$$

得到

$$(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}=0 \tag{9.1.24}$$

和

$$(\boldsymbol{B}^*-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}=0 \tag{9.1.25}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1/2} \tag{9.1.26}$$

$$\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{M}^{-1/2} \tag{9.1.27}$$

由此可见，$\boldsymbol{B}^*$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的差别仅在最后一个对角元素，前者为 k_N，而后者为 k_N+k_{N+1}，即

$$a_N=\frac{k_N}{m_N},a_N^*=\frac{k_N+k_{N+1}}{m_N} \tag{9.1.28}$$

求解上述逆问题的步骤是：首先，由式(9.1.18)求出 k_{N+1}/m_N；其次，由式(9.1.17)和式(9.1.18)求出 $\mu_N^{(i)}\,(i=1,2,\cdots,N)$；

第三,利用 Lanczos 算法解出 $\boldsymbol{B}$;最后,由 $\boldsymbol{B}$ 解出质量及刚度[1]。

下面讨论由 $\boldsymbol{B}$ 解出质量及刚度的问题。

如果集中力 $f_1=k_1$ 作用在质点 m_1 上,则仅弹簧 k_1 被拉长单位长度。由于系统右端自由,所有质点都产生单位位移,即

$$\boldsymbol{x}=\{1,1,\cdots,1\} \tag{9.1.29}$$

这个位移由

$$\boldsymbol{Cx}=\{k_1,0,\cdots,0\} \tag{9.1.30}$$

给出。它等价于

$$\boldsymbol{Bu}=\{m_1^{-1/2}k_1,0,\cdots,0\} \tag{9.1.31}$$

注意到式(9.1.29),其解必为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{x}=\{m_1^{-1/2},m_2^{-1/2},\cdots,m_N^{-1/2}\} \tag{9.1.32}$$

如果不知道 $m_1^{-1/2}$,从任意假定的 $u_N=m_N^{1/2}$ 出发,用求解三对角方程组(9.1.31),可求出 $m_i^{1/2}(i=1,2,\cdots,N-1)$。在已知总质量 m 之后,可以计算全部的 m_i。

三对角矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{M}^{1/2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}^{1/2} \tag{9.1.33}$$

满足

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{9.1.34}$$

待求的对角型刚度矩阵有如下形式,即

$$\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}^{-\mathrm{T}}=\boldsymbol{K} \tag{9.1.35}$$

其中

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix} \tag{9.1.36}$$

$$
E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.1.37}
$$

$$
K = \mathrm{diag}\{k_1, k_2, \cdots, k_N\} \tag{9.1.38}
$$

这样,就完成了系统的构造。

9.2 多体动力学逆问题

多体系统分为多刚体系统和多柔体系统两大类。多体动力学逆问题的提出来源于理论与实际两个方面,特别有工程背景,例如,大型航天结构和机械臂的端点要按照某种指定的规律运动来求铰关节的控制力矩。这就是一类典型动力学逆问题。参考文献[3]给出一类多体系统动力学逆问题的提法和解法。

多柔体动力学逆问题的难点在于处理非线性,以及刚体与柔体运动相耦合的动力学方程。在分析时需要同时注意保证机械臂端点的定位精度和铰关节的位置精度。为处理非线性,可将运动学关系和动力学方程在刚性模型假设下的位置附近线性化,建立用于柔性机械臂动力学逆问题分析的解耦数学模型。引入虚刚体坐标系可以消除动力学方程中不同柔性连杆模态坐标之间的耦合现象,使柔性机械臂轨迹追踪问题的动力学逆问题计算得到简化。在研究端点轨迹追踪问题时,可用傅里叶(Fourier)变换将系统动力学方程变换到频率域,再将频率域对控制力矩的计算结果反变换到时域而完成动力学逆问题分析过程。亦可从时域分析着手,通过构造关节的运动轨迹族,将柔性机械臂的点位控制问题转化为对非线性规划问题的求解[4]。

计算机辅助方法在求解机器人主动机构力学模型时十分重要。每一种计算机辅助方法的目标都是导出函数 f 和 g 使得[5]

$$
\ddot{\boldsymbol{u}} = f(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{p}, \text{机构的构造}) \tag{9.2.1}
$$

而

$$\boldsymbol{p}=g(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\ddot{\boldsymbol{u}},\text{机构的构造}) \tag{9.2.2}$$

式中:矢量 $\boldsymbol{u}$ 表示一组描述机构位置的变量,如果用广义坐标 q_1,q_2,…,q_n,来描述,则有

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q}=[q_1,q_2,\cdots,q_n]^{\mathrm{T}} \tag{9.2.3}$$

并且矢量 $\boldsymbol{u}$ 的元素是彼此独立的。

如果每一个构件的位置由 6 个变量来确定,例如,质心的三个直角坐标和三个 Euler 角,则矢量 $\boldsymbol{u}$ 是 $6m$ 维的,此时有

$$\boldsymbol{u}=[x_1y_1z_1\theta_1\Psi_1\varphi_1\cdots x_my_mz_m\theta_m\Psi_m\varphi_m]^{\mathrm{T}} \tag{9.2.4}$$

这里矢量 $\boldsymbol{u}$ 的元素不是彼此独立的。这取决于运动副的约束情况,这种依赖性必须包含在函数 f 和 g 中。$\boldsymbol{p}$ 表示作用在机构铰链中的驱动力和力矩,函数 f 和 g 并不是某个预先给定或导出的显函数,它代表一大串计算机算法。函数 f 表示当已知 $\boldsymbol{u}$、$\dot{\boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{p}$ 以及构造时用来计算 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ 的算法,而函数 g 表示当已知 $\boldsymbol{u}$、$\dot{\boldsymbol{u}}$、$\ddot{\boldsymbol{u}}$ 以及构造时用来计算 $\boldsymbol{p}$ 的一种算法。实现 f 和 g 的各种算法依赖于力学上所取的方法,它们各具特色。值得注意的是,虽然 f 和 g 的算法是互相关联的,但在实现时却往往采取极不相同的途径[5]。

对一个有限时间间隔 T 来考虑力学模型的解。计算机辅助方法要对离散时间进行运算,将时间间隔 T 分割成小的间隔 Δt_k,并引进瞬时序列 $t_0,t_1,\cdots,t_{\mathrm{end}}$,小间隔 Δt_k 可以是等长度,也可以是不等长度。

这里动力学问题仍分为两类。首先,考虑动力学正问题:对于给定的驱动 $\boldsymbol{p}$ 来求解运动 $\boldsymbol{u}(t)$。机构的初始状态 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}(t_0)$ 是给定的,必须在此初瞬时 t_0 建立力学模型式(9.2.1),实现 f 的算法并计算出

$$\ddot{\boldsymbol{u}}(t_0)=f(\boldsymbol{u}(t_0),\dot{\boldsymbol{u}}(t_0),\boldsymbol{p}(t_0),\text{构造}) \tag{9.2.5}$$

在一个很小的时间间隔内将所得加速度 $\ddot{\boldsymbol{u}}(t_0)$ 当作常量,积分得下一瞬时 $t_1=t_0+\Delta t_1$ 的状态

$$u(t_1) = \frac{1}{2}\dot{u}(t_0)(\Delta t_1)^2 + \dot{u}(t_0)\Delta t_1 + u(t_0)$$
$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_0)\Delta t_1 + \dot{u}(t_0) \quad (9.2.6)$$

在瞬时 t_1 再将整个步骤重复一遍，于是就可以得到一个时间递推过程，其输出就是机构的运动 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}(t)$。

下面考虑动力学逆问题：已知运动来求驱动 $\boldsymbol{p}$。已知运动是指已知一系列瞬时的 $\boldsymbol{u}$、$\dot{\boldsymbol{u}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{u}}$，但是输入只有 $\ddot{\boldsymbol{u}}(t)$。当已知 $\ddot{\boldsymbol{u}}(t)$ 时，可由式(9.2.6)根据前一瞬时的值计算出 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 的值。这样，动力学逆问题的解可按下列步骤实现：对于每一瞬时，模型式(9.2.2)已经建立，即 g 的算法已经得出，驱动 $\boldsymbol{p}$ 就可以算出来，其输出就是 $\boldsymbol{p}(t)$。

下面讨论闭链动力学的逆问题。

考虑无分支的开链，通过对最末一个的构件位置施加一个约束将链封闭，可考虑两种类型约束。

情形 1　最末一个构件上的一点与给定的表面相接触。

情形 2　最末一个构件上的一点与给定的线相接触。

这种约束在工业机器人实际问题中会经常出现。

首先，研究情形 1。考虑由 n 个刚体组成的无分支开链。设每一个铰链只有一个自由度(转动或平动)，$\boldsymbol{e}_i$ 位转动轴(当 S_i 是转动铰时)或平移轴(当 S_i 为平动铰时)的单位矢量，因此共有 n 个自由度。考虑最末构件，即第 n 个构件上的一点 V，它在固定系中的坐标记作(x,y,z)，加上一个约束使 V 点始终在固定曲面

$$h(x,y,z)=0 \quad (9.2.7)$$

上(图9-2)。

如果曲面可按某种给定规律运动时，则相应的方程为

$$h(x,y,z,t)=0 \quad (9.2.8)$$

这样的机构有$(n-1)$个自由度。将这种机构看作自由的，只要在点 V 加一约束反力 $\boldsymbol{R}$，其方向由曲面的梯度确定。于是，微分方程有如下形式，即

$$\boldsymbol{W}\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{R} \quad (9.2.9)$$

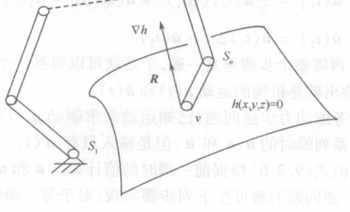


图 9－2　情形 1

式中：$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶驱动力或力矩矢量；$\boldsymbol{W}$ 是 $n\times n$ 矩阵；$\boldsymbol{U}$ 是 $n\times 1$ 矩阵；$\boldsymbol{DR}$ 表示由于力 $\boldsymbol{R}$ 作用引起的广义力分量，而 $\boldsymbol{D}$ 为 $n\times 3$ 矩阵，即

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{9.2.10}$$

其中当 S_i 为转动铰时有 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r}_\nu^i$，当 S_i 为平动铰时有 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{e}_i$，而 $\boldsymbol{r}_\nu^i=S_iV$，于是对于已知机构状态时，矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的数值计算问题就解决了。考虑点 V 可以导出一个函数 $\eta(\boldsymbol{q})$，当已知点 V 的广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 时由它可计算出 V 的坐标，即 $(x,y,z)=\eta(\boldsymbol{q})$。

上述动力学的逆问题是指，已知机构满足约束的运动和已知反作用力 $\boldsymbol{R}$ 的代数值来计算出驱动 $\boldsymbol{P}$。由于时间当作一个瞬时序列，假定在每一瞬时 $\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、$\ddot{\boldsymbol{q}}$ 以及反力 $\boldsymbol{R}$ 的数值 N 都是给定的，反力 $\boldsymbol{R}$ 的方向由曲面 h 的梯度来确定。对于每一个特定的瞬时 t_k，有

$$\boldsymbol{R}(t_k)=N(t_k)\frac{\nabla h(x(t_k),y(t_k),z(t_k))}{|\nabla h|} \tag{9.2.11}$$

这是对约束为式(9.2.7)的情形。如果约束为式(9.2.8)，则有

$$R(t_k)=N(t_k)\frac{\nabla h(x(t_k),y(t_k),z(t_k),t_k)}{|\nabla h|} \tag{9.2.12}$$

在算出 $\boldsymbol{R}$ 之后就可计算 $\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{D}$，然后计算出该瞬时所需要的驱动

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{W}\ddot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{U}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{R} \tag{9.2.13}$$

对于每一个瞬时重复这个过程就得到整个时间间隔中的驱动 $\boldsymbol{P}$。

其次，研究情形 2。考虑图 9－3 的情形。此时最末一个构件的点 V 落在一个给定的曲线上，此曲线的方程为

$$\begin{aligned} h_1(x,y,z,t)=0 \\ h_2(x,y,z,t)=0 \end{aligned} \tag{9.2.14}$$

此时，约束反力表示为

$$\boldsymbol{R}=N_1\frac{\nabla h_1}{|\nabla h_1|}+N_2\frac{\nabla h_2}{|\nabla h_2|} \tag{9.2.15}$$

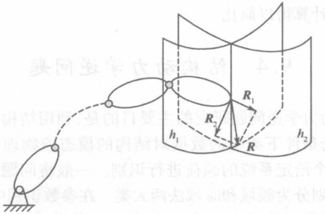


图 9－3　情形 2

这类逆问题的解法与前面相同。

9.3　转子动力学逆问题

转子系统的一个突出特点是，有些参数只有在转子运转过程中才能确定，如油膜特性参数和密封特性参数等。转子动力学逆问题主要应用于油膜动力学特性参数测量、转子工作过程中不平

衡量在线测量、密封特性测量和摩擦系数测量等。转子动力学逆问题技术在故障诊断中也得到很多应用。

转子系统工作过程中受到多种力的作用,而这些力一般是很难测量的。由于结构的限制,转子的振动一般仅能在轴承附近测量,并且很难测量到转子弯曲振动的转角,因此,对逆问题的另一限制条件是系统的输出信息仅有部分可以测得。为此,这类动力学逆问题尚需补充一些假设。

参考文献[4]指出,有三种方法解决外界周期激振力不能测量的问题。对于非线性系统,利用谐波平衡原理,将周期激振力形式上从转子的运动方程中去掉。对于线性系统,可对未知激振力和未知模型参数同时识别。另一方法是施加可以测量的外界激振力,但对高速旋转的大型转子施加激振力比较困难并有一定危险性。当仅需要求出部分参数时,可以通过变换得到待求参数的独立方程,使计算得以简化。

9.4 结构动力学逆问题

结构动力学逆问题研究的主要目的是,利用结构振动实验数据或在现场条件下测得的数据对结构的模态或物理参数进行识别,或对一个给定系统的载荷进行识别。一般将问题称为振动参数识别,并划分为频域和时域法两大类。在参数识别中,假设描述系统的数学模型的形式是给定的,但模型的阶次可能是未知的。频域方法主要采用传递函数模型,而时域法则多采用状态方程,自回归—滑动模型和自回归模型[4]。

由于结构振动系统内在地存在谱特性,最初人们用结构共振的特点来判断固有频率、阻尼系数和振型。随着测试技术和电子计算机的发展以及快速傅里叶变换技术的出现,使振动测试技术和分析方法取得很大进步,发展了大量由频响函数曲线识别系统的模态参数的方法,并发展了正弦快速扫描、捶击法和随即激振等宽频带激振手段。这些技术大大缩短了取得模

态信息的周期。振动信号分析软硬件的商品化又大大缩短了数据分析的周期。

时域方法的优点在于,可以利用结构瞬态激振的响应而不需要测取激振力而识别模态参数,并且适用于模态密集和大阻尼的情况,还可处理测量噪声比较大的情况。时域方法的基本思想是不对测量数据进行傅里叶变换,直接由状态方程和自回归—滑动模型等时域模型来计算参数,并进行模态参数计算[4]。

9.5 弹性动力学逆问题

弹性动力学逆问题的主要研究内容是利用固体介质中弹性波的波场信息来推断介质的物理、力学参数空间分布的性状和结构的特征。这类逆问题是地球物理勘探、油气开发、岩土工程、地址勘察、材料定量损检测等许多工程应用学科的基础。

弹性动力学逆问题与其他动力学逆问题一样,也以正问题的理论与方法为基础。同时,又有本身的许多特点和问题,例如,解的不适定性就是数学物理学科中一大类数理方程中的一个重要课题。弹性动力学逆问题也借鉴其他相关学科的研究成果,如光学中波动理论、量子力学中逆散射理论和波恩(Born)近似方法、电磁学中的雷达成像技术、X 射线、CT 技术等。

弹性动力学逆问题的解法分可分三个层次[4]。

(1)射线理论方法。利用首波到时信息,是当前工程中广泛应用的方法,但对信息利用不充分。

(2)声波理论方法。不考虑波型转换,是当前正在发展的方法。

(3)弹性波理论方法。充分利用弹性波在传播中的各种传播方式、波型模式转换、波导、层间波、绕射、散射,以及波速、波形、振幅、相位、偏振及频谱结构等丰富信息。但是,现象复杂,方法困难,解的稳定性差。

参 考 文 献

[1] 格拉德威尔 GML. 振动中的反问题. 王大均，何北昌，译. 北京：北京大学出版社，1991.

[2] 范钦珊. 工程力学教程(Ⅲ). 北京：高等教育出版社，1998.

[3] 吕哲勤. 多刚体系统动力学逆问题. 见：洪嘉振. 多体系统动力学——理论，计算方法和应用. 上海：上海交通大学出版社，1992.

[4] 黄文虎，郑钢铁. 动力学反问题及其工程应用. 见：庄逢甘. 现代力学与科技进步. 北京：清华大学出版社，1997.

[5] Vokobratović M, Potkonjak V. Dynamics of Manipulation Robots. Theory and Application. New York：Springer-Verlag，1982.

内 容 简 介

本书全面系统地论述有限自由度力学系统的动力学逆问题，包括动力学逆问题的基本提法和解法，分析动力学中的逆问题，运动控制理论中的逆问题，刚体动力学中的逆问题，变质量动力学中的逆问题，非完整动力学中的逆问题，Birkhoff 系统动力学逆问题，广义 Birkhoff 系统动力学逆问题以及其他动力学逆问题等。

本书可供力学、数学、物理学工作者和相关工程技术人员参考。

The object of this book is to impart a systematic and comprehensive understanding of the inverse problems in dynamics for mechanical systems with finite degree-of – freedom. Chapter 1 introduces the formulations and solutions of inverse problems in dynamics. Chapter 2 is concerned with inverse problems in analytical dynamics. Chapter 3 relates the inverse problems with theory of motion control. Chapter 4 discusses the inverse problems in rigid body dynamics. Chapter 5 addresses the inverse problems in dynamics of systems with variable mass. Chapter 6 discusses the inverse problems in dynamics of nonholonomic systems. Chapter 7 presents inverse problems in dynamics of Birkhoff system. Chapter 8 gives the exetension of inverse problems in dynamics to the generalized Birkhoff system. Chapter 9 illustrates the inverse problems in dynamics on other aspects.

The book is intend to serve as the materials for researcher on mechanis, mathematics, physics and other related research field.